Краткий курс

ГИА
подготовка к экзамену

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА, ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

9 класс

НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Краткий курс

Н. В. Шевелева, Т. А. Корешкова, В. В. Мирошин

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА, ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

9 класс

МОСКВА
НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
2011

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
Ш 37

Авторы: ***Н.В. Шевелева***, канд. физ-мат. наук
Т.А. Корешкова, канд. пед. наук
В.В. Мирошин, канд. пед. наук

Шевелева Н.В.

Ш 37 **Математика (алгебра, элементы статистики и теории вероятностей). 9 класс / Н.В. Шевелева, Т.А. Корешкова, В.В. Мирошин. — М. : Национальное образование, 2011. — 144 с. : ил. — (Краткий курс).**

ISBN 978-5-905084-55-3

Пособие предназначено для учащихся 9 классов. В нём в краткой и доступной форме представлены сведения по основным темам курса алгебры 9 класса, а также по разделу «Элементы статистики и теории вероятностей». Особое внимание уделяется разбору решения типовых задач.

Книга будет полезна учащимся в процессе обучения, а также при повторении материала в целях его систематизации и при подготовке к экзамену.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-905084-55-3

Введение

Пособие «Математика (алгебра, элементы статистики и теории вероятностей). 9 класс» серии «Универсальный краткий курс» содержит информацию, представленную в краткой и доступной форме, по следующим разделам курса алгебры: «Рациональные неравенства и их системы», «Системы уравнений», «Числовые функции», «Прогрессии». В пособие также включён раздел математики «Элементы статистики и теории вероятностей».

В пособии представлены методы решения неравенств, их систем, систем уравнений, а также методы решения различных текстовых задач; рассмотрены свойства различных числовых функций, понятия и свойства арифметической и геометрической прогрессий. Освещены вопросы представления статистических данных, их средних характеристик; кроме того, рассмотрены понятия случайного события и его вероятности, правила нахождения вероятностей.

В конце каждого раздела представлены типовые задачи по темам данного раздела с подробным разбором их решений. Аналогичные задачи включены в контрольно измерительные материалы Государственной итоговой аттестации (ГИА).

Пособие может использоваться с любым из действующих учебников. Оно поможет вам в освоении курса математики, повторении материала и при подготовке к экзамену.

Глава 1. Рациональные неравенства и их системы

1.1. Числовые множества и числовые неравенства

Числовые множества:

- **множество натуральных чисел N — 1, 2, 3, 4, ...;**
- **множество целых чисел Z — ... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...;**
- **множество рациональных чисел Q.**

Рациональным является число, которое можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Число, которое нельзя представить в виде такого отношения, называется иррациональным числом;

Примеры:

1) 105; $-0{,}77$; $\frac{123}{25}$; $\sqrt{9}$; $9^{\frac{5}{2}}$; $\sqrt[3]{27}$ — рациональные числа;

2) $\sqrt{5}$; $3^{\frac{5}{2}}$; $\sqrt[7]{16}$; $\sin\frac{\pi}{4}$; π — иррациональные числа.

- **множество действительных чисел R (множество всех рациональных и иррациональных чисел).**

Среди двух неравных чисел любого числового множества одно число всегда больше или меньше другого.

!

— **Число a больше числа b,** если разность $a-b$ положительна, то есть $a-b>0$. Обозначают: $a>b$.

— **Число a меньше числа b,** если разность $a-b$ отрицательна, то есть $a-b<0$. Обозначают: $a<b$.

Примеры:

1) число 0,208 больше числа 0,0802, так как $0{,}208-0{,}0802=0{,}1278>0$;

2) число 0,08 меньше числа 0,0802, так как $0{,}08-0{,}0802=-0{,}0002<0$.

Знаки > и < называют противоположными друг другу. Если $a>b$, то $b<a$.

Свойства числовых неравенств

1 Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$. Аналогично, если $c<b$ и $b<a$, то $c<a$.

Пример. $6>4$ и $4>-2$, тогда $6>-2$.

2 Если $a>b$, то $a+c>b+c$.

Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число (положительное или отрицательное), то знак неравенства не изменится.

Пример.
$6>4$, тогда $6+3>4+3$.

3 Если $a+c>b$, то $a>b-c$.

Любое слагаемое можно переносить из одной части неравенства в другую, изменяя при этом знак слагаемого на противоположный.

Пример.
$6+10>4$, тогда $6>4-10$.

4 Если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$ и $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$. Если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$ и $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное (отрицательное) число, то знак неравенства не изменится (знак неравенства изменится на противоположный).

Пример.
$6>4$, тогда $6\cdot(-3)<4\cdot(-3)$.

5 Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

При сложении неравенств одинакового знака получается неравенство того же знака.

Пример.
$6>4$ и $3>2$, тогда $6+3>4+2$.

6 Если для положительных чисел a, b, c, d $a>b$ и $c>d$, то $a\cdot c>b\cdot d$.

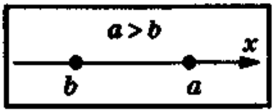
При умножении неравенств одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, получается неравенство того же знака.

Пример.
$6>4$ и $3>2$, тогда $6\cdot3>4\cdot2$.

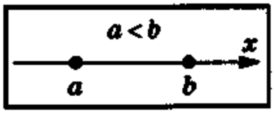
1.2. Сравнение величин

! **Сравнить два числа — это значит выяснить, какой из знаков > (больше), < (меньше), = (равно) нужно поставить между этими числами, чтобы получить верное соотношение.**

Геометрически неравенство $a > b$ означает, что на координатной прямой (числовой оси) точка, соответствующая числу a, расположена правее точки, соответствующей числу b.

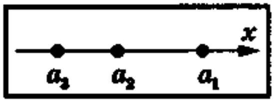


Геометрически неравенство $a < b$ означает, что на координатной прямой точка, соответствующая числу a, расположена левее точки, соответствующей числу b.



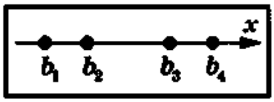
Расположение заданных чисел в порядке убывания означает, что каждое следующее записанное число должно быть **меньше** предыдущего.

Расположение чисел a_1, a_2, a_3 в порядке убывания означает, что $a_2 < a_1$, $a_3 < a_2$. Геометрически это интерпретируется так:



Расположение заданных чисел в порядке возрастания означает, что каждое следующее записанное число должно быть **больше** предыдущего.

Расположение чисел b_1, b_2, b_3, b_4 в порядке возрастания означает, что $b_2 > b_1$, $b_3 > b_2$, $b_4 > b_3$. Геометрически это интерпретируется так:



! **Строгими неравенствами** называют неравенства со знаками > (больше) и < (меньше), **нестрогими** — неравенства со знаками ≥ (больше или равно) и ≤ (меньше или равно).

Знаки ≥ и ≤ считают противоположными друг другу.

Неравенство $a \ge b$ означает, что $a > b$ или $a = b$, то есть a **НЕ МЕНЬШЕ** b.

Неравенство $a \le b$ означает, что $a < b$ или $a = b$, то есть a **НЕ БОЛЬШЕ** b.

Примеры:

1) a меньше 2 означает $a < 2$;
2) a не меньше 2 означает $a \ge 2$;
3) a не больше 2 означает $a \le 2$.

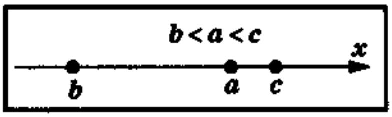
Свойства строгих числовых неравенств справедливы и для нестрогих неравенств.

Примеры:
1) если $a \ge b$, то $-a \le -b$;
2) если $a \ge 0$ и $b \ge 1$, то $a+b \ge 1$;
3) если $a \ge 1$ и $b \ge 1$, то $ab \ge 1$.

Два неравенства $a > b$ и $a < c$ принято записывать в виде **двойного неравенства** $b < a < c$. Аналогично, $a \ge b$ и $a \le c$ записывают $b \le a \le c$.

Примеры:
1) a больше 5 и меньше 7, то есть $5 < a < 7$;
2) v не меньше 80 и не больше 120, то есть $80 \le v \le 120$;
3) t больше 0 и не больше 100, то есть $0 < t \le 100$.

Геометрически неравенство $b < a < c$ означает, что на координатной прямой точка, соответствующая числу a, расположена между точками, соответствующими числам b и c.



1.3. Рациональные неравенства с одной переменной

Рациональным неравенством с одной переменной x называется неравенство $f(x) > g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — алгебраические выражения, составленные из чисел и переменной x с помощью арифметических операций и возведения в натуральную степень. Вместо знака > может быть записан любой из знаков: <, ≤, ≥.

Примеры:
1) $x^4 > 6 - x^2$;
2) $\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} > 0$;
3) $y^3 - 8 \le 0$ — рациональные неравенства.

В частности, рациональными являются следующие неравенства:

- **линейное неравенство** — неравенство вида $ax + b > 0$, где a и b — действительные числа, причём $a \neq 0$.
- **квадратное неравенство** — неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b и c — действительные числа, причём $a \neq 0$.

! **Решением неравенства** называется значение переменной, при подстановке которого в неравенство оно обращается в верное числовое неравенство. Вместе с тем **решением неравенства** называют также множество всех таких значений переменной. **Решить неравенство** — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Пример. Число 1 является решением неравенства $y^3-8\leq 0$, так как при подстановке $y=1$ в неравенство получается верное числовое неравенство $1-8\leq 0$ или $-7\leq 0$.

! Два рациональных неравенства называются **равносильными**, если они имеют одни и те же решения (иными словами, все решения первого неравенства являются решениями второго и наоборот) или когда они оба не имеют решений.

Для записи равносильности неравенств используют символ $\Leftrightarrow$.

При решении неравенства стараются заменить исходное неравенство более простым, но равносильным ему. При этом символ равносильности допустимо не записывать.

Правила равносильности неравенств

1 Если из одной части неравенства перенести слагаемые в другую часть с противоположными знаками и сохранить знак неравенства, то полученное неравенство будет равносильно исходному.

Пример. $x^4>6-x^2 \Leftrightarrow x^4+x^2-6>0.$

2 Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число и сохранить знак неравенства, то полученное неравенство будет равносильно исходному.

Пример. $\frac{x}{3} \le 9 \Leftrightarrow x \le 27.$

3 Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, положительное при всех значениях переменной, и сохранить знак неравенства, то полученное неравенство будет равносильно исходному.

Пример. Так как $x^2+1>0$, то $\frac{x}{x^2+1}>6 \Leftrightarrow x>6\left(x^2+1\right)$.

4 Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то полученное неравенство будет равносильно исходному.

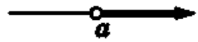
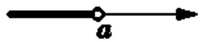
Пример. $-\frac{x^4}{2}>6+x^2 \Leftrightarrow x^4<-12-2x^2.$

5 Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, отрицательное при всех значениях переменной, и изменить знак неравенства на противоположный, то полученное неравенство будет равносильно исходному.

Пример. Так как $-x^2-1<0$, то $x\left(-x^2-1\right)>6\left(-x^2-1\right) \Leftrightarrow x<6.$

1.4. Решения системы и совокупности неравенств

Решениями простейших неравенств с переменной x: $x>a$, $x\geq a$, $x<a$, $x\leq a$ являются соответствующие числовые промежутки (лучи), указанные в таблице.

Неравенство	*Числовой промежуток*	*Интерпретация на координатной прямой*
$x>a$	$(a; +\infty)$	
$x\geq a$	$[a; +\infty)$	
$x<a$	$(-\infty; a)$	
$x\leq a$	$(-\infty; a]$	

! **Решением системы неравенств** с одной переменной является множество всех значений переменной, каждое из которых обращает в верные числовые неравенства **все неравенства** системы.

Для записи **системы неравенств** используют фигурную скобку.

Пример. Значение $x=0$ является одним из решений системы неравенств $\begin{cases} x>-4, \\ x<1, \end{cases}$ так как при подстановке этого значения в оба неравенства получаем верные числовые неравенства: $0>-4$, $0<1$.

! **Решением совокупности неравенств** с одной переменной является множество всех значений переменной, каждое из которых обращает в верное числовое неравенство **хотя бы одно неравенство** совокупности.

Для записи **совокупности неравенств** — квадратную скобку.

Пример. Значение $x=3$ является одним из решений совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x>-4, \\ x<1, \end{array}\right.$ так как при подстановке этого значения в первое неравенство получаем верное числовое неравенство $3>-4$.

Решение системы (совокупности) двух простейших неравенств

1 Изобразим на координатной прямой числовые промежутки, являющиеся решениями каждого неравенства.

Для изображения первого промежутка удобно использовать штриховку выше координатной прямой, для второго — штриховку ниже этой прямой.

Пример. Решениями первого и второго неравенств системы $\begin{cases} x \le -4, \\ x < 1 \end{cases}$ являются промежутки $(-\infty; -4]$ и $(-\infty; 1)$. Их пересечение $(-\infty; -4]$ является решением системы неравенств.

2 Для нахождения решения системы неравенств определим промежуток, имеющий обе штриховки, то есть пересечение решений обоих неравенств системы.
Для нахождения решения совокупности неравенств определим промежуток или объединение промежутков, имеющие хотя бы одну штриховку, то есть объединение решений обоих неравенств совокупности.

Для записи объединения промежутков используют символ $\cup$.

Пример. Решением совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x \le -4, \\ x < 1 \end{array}\right.$ является объединение промежутков $(-\infty; -4]$ и $(-\infty; 1)$, то есть промежуток $(-\infty; 1)$.

1.5. Линейные неравенства, содержащие модуль

При решении двойных неравенств используют правила равносильности и интерпретацию решений на координатной прямой.

При этом Правило 1 следует формулировать так: ко всем частям неравенства можно прибавлять одно и то же число

или выражение: $\boxed{a<x<b \Leftrightarrow a+c<x+c<b+c}$

Пример. $0 \le \frac{x}{2}-1 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{2} \le 3 \Leftrightarrow 2 \le x \le 6.$

По Правилу 4 при умножении всех частей неравенства на отрицательное число надо изменить оба знака неравенства на противоположные. Поэтому $a<-x<b \Leftrightarrow -a>x>-b$. Второе неравенство принято записывать в виде $-b<x<-a$.

$\boxed{a<-x<b \Leftrightarrow -b<x<-a}$

Пример. $-8 \le -x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 8.$

В случае сложного двойного неравенства его можно записать в виде системы двух неравенств и решать полученную систему.

Пример. $-5 \le 2x+3<13 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \ge -5, \\ 2x+3<13. \end{cases}$

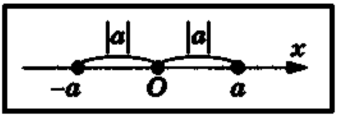
К решению двойных неравенств может привести решение некоторых линейных неравенств, содержащих модуль.

! **Модулем (или абсолютной величиной) числа a называется:**
— само это число, если число a положительное или ноль,
— число, противоположное ему, если число a отрицательное.

$$|a| = \left[\begin{array}{l} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{ если } a<0. \end{array}\right.$$

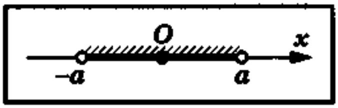
Примеры: 1) $|25|=25$; 2) $|-1{,}7|=1{,}7$; 3) $|0|=0$.

Геометрически $|a|$ определяет расстояние от начала координат O до точки с координатой a.



Важно помнить, что $\boxed{|a| \ge 0}$ и $\boxed{|a|=|-a|}$.

Решением неравенства $|x|<a$, где $a>0$, является множество всех значений переменной x, находящихся внутри интервала $(-a;\ a)$.



$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a \quad \text{при } a>0$$

Примеры:

1) $|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2;$

2) $|x-2|<5 \Leftrightarrow -5<x-2<5;$

3) $|3x+7|\le 10 \Leftrightarrow -10\le 3x+7\le 10.$

Решением неравенства $|x|>a$, где $a\ge 0$, является множество всех значений переменной x, принадлежащих объединению двух промежутков: $(-\infty;\ -a)\cup(a;\ +\infty)$.

$$|x|>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-a, \\ x>a \end{array}\right. \quad \text{при } a\ge 0$$

Примеры:

1) $|x|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>2; \end{array}\right.$

2) $|x-2|>5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2<-5, \\ x-2>5; \end{array}\right.$

3) $|3x+7|\ge 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+7\le -10, \\ 3x+7\ge 10. \end{array}\right.$

Заметим, что вместо знаков > и < могут стоять знаки ≥ и ≤.

1.6. Квадратные неравенства

Рассмотрим решение квадратных неравенств $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c>0$ для случая $a>0$.

Если $a<0$, надо умножить обе части неравенства на (-1) и свести решение неравенства к случаю $a>0$.

При решении квадратных неравенств $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c>0$ при $a>0$ будем использовать график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ для определения промежутков, на которых эта функция принимает отрицательные и положительные значения.

Глава 1

Решение квадратных неравенств

1 Найдём значения x, при которых $y=0$. (Эти значения называют нулями функции.)

Для этого решим квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, $a>0$. Вычислим дискриминант $D=b^2-4ac$. Возможны три случая:

1) если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$;

2) если $D=0$, то уравнение имеет единственный корень: $x_1=-\dfrac{b}{2a}$;

3) если $D<0$, то уравнение корней не имеет.

2 Построим схематично график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, $a>0$.

При схематичном построении достаточно отметить точки на оси Ox, абсциссы которых равны x_1 и x_2.

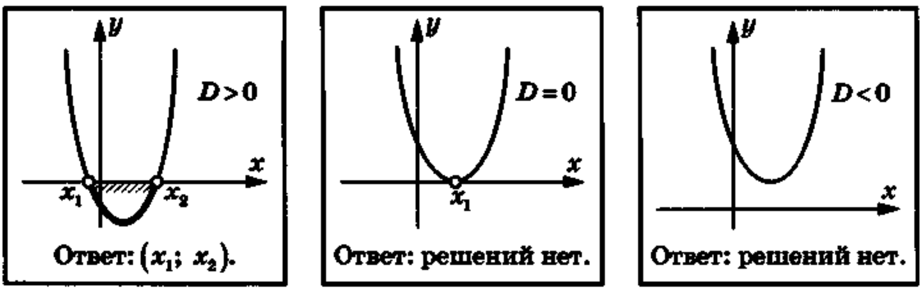
При $a>0$ графиком квадратичной функции является парабола, ветви которой направлены вверх.

Если $D>0$, то парабола пересекает ось Ox в двух различных точках.

Если $D=0$, то парабола касается оси Ox в одной точке.

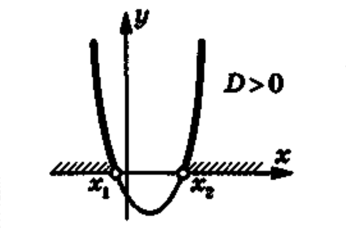
Если $D<0$, то парабола не пересекает ось Ox и лежит полностью выше оси.

3 Найдём значения x, для которых $ax^2+bx+c<0$, то есть определим промежуток на оси Ox, где часть параболы лежит ниже оси Ox, и нанесём соответствующую штриховку.

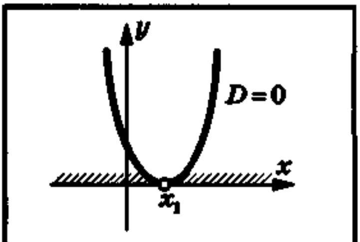


Для записи ответа «решений нет» используют символ пустого множества $\varnothing$.

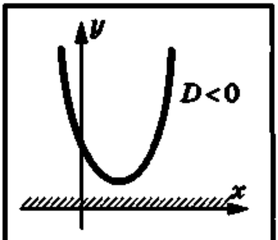
Найдём значения x, для которых $ax^2+bx+c>0$, то есть определим промежутки на оси Ox, где части параболы лежат выше оси Ox, и нанесём соответствующую штриховку.



Ответ: $(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$.



Ответ: $(-\infty;\ x_1)\cup(x_1;\ +\infty)$.



Ответ: $(-\infty;\ +\infty)$.

1.7. Нестрогие квадратные неравенства

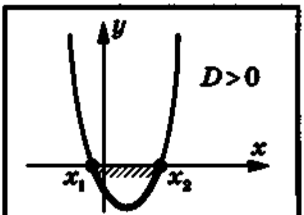
Рассмотрим решение неравенств $ax^2+bx+c\le 0$ и $ax^2+bx+c\ge 0$ для случая $a>0$. Если $a<0$, надо умножить обе части неравенства на (-1) и свести решение неравенства к случаю $a>0$.

При решении нестрогих квадратных неравенств $ax^2+bx+c\le 0$ и $ax^2+bx+c\ge 0$ при $a>0$ будем использовать график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ для определения промежутков, на которых эта функция принимает неположительные (отрицательные или ноль) и неотрицательные (положительные или ноль) значения.

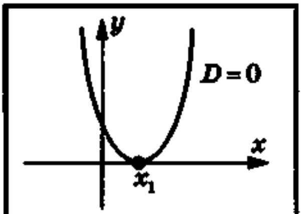
Решение нестрогих квадратных неравенств

1. Выполним пункты 1 и 2 из параграфа 1.6.

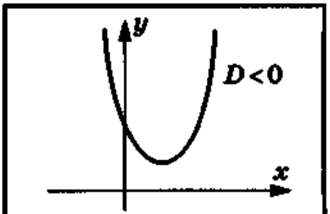
2. Найдём значения x, для которых $ax^2+bx+c\le 0$, то есть определим промежуток на оси Ox, где часть параболы лежит ниже оси Ox, и нанесём соответствующую штриховку. Затем включим точки, в которых парабола пересекает ось Ox или касается её.



Ответ: $[x_1;\ x_2]$.

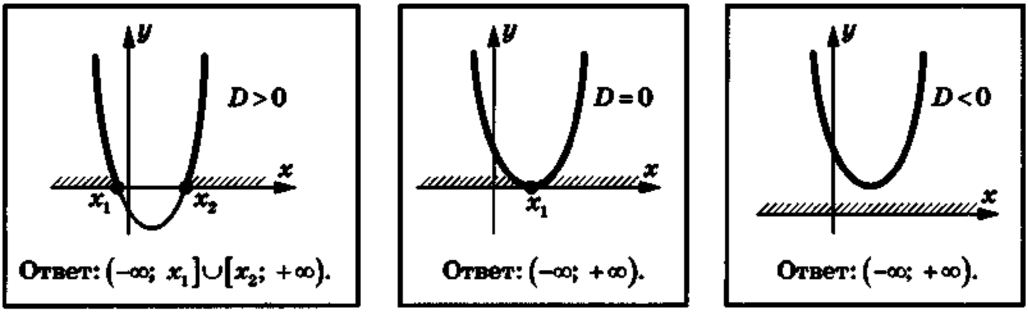


Ответ: x_1.



Ответ: решений нет.

Найдём значения x, для которых $ax^2+bx+c\geq 0$, то есть определим промежутки на оси Ox, где части параболы лежат выше оси Ox, и нанесём соответствующую штриховку. Затем включим точки, в которых парабола пересекает ось Ox или касается её.



Рассмотрим квадратное неравенство $ax^2+bx+c\leq 0$, $a\neq 0$, когда хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю. В этом случае корни неполного квадратного уравнения удобнее находить разложением левой части уравнения на множители.

Примеры: 1) $x^2-5x=0\Leftrightarrow x(x-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\x-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=5;\end{array}\right.$

2) $x^2-4=0\Leftrightarrow(x+2)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=0,\\x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=2.\end{array}\right.$

Используя свойство корня $\sqrt{x^2}=|x|$, неравенство $x^2-d\leq 0$ при $d\geq 0$ можно решать так:

$$\boxed{x^2-d\leq 0\Leftrightarrow x^2\leq d\Leftrightarrow|x|\leq\sqrt{d}\Leftrightarrow-\sqrt{d}\leq x\leq\sqrt{d}}$$

1.8. Линейные неравенства с параметром

Линейными неравенствами с параметрами являются неравенства типа $x-b\leq 0$, $ax<2$, $(p^2-1)x+p-1>0$ и другие, содержащие кроме переменной x переменные величины b, a, p и другие, которые также могут принимать различные числовые значения.

Решением неравенства с параметром при фиксированном значении параметра называется такое значение переменной, при подстановке которого в неравенство оно обращается в верное числовое неравенство. Вместе с тем решением неравенства с параметром называют также множество всех таких значений переменной.

Примеры: 1) при значении параметра $b=7$ число 1 является решением неравенства $x-b\le 0$, так как при подстановке $x=1$ в неравенство получаем верное числовое неравенство $1-7\le 0$ или $-6\le 0$;
2) при значении параметра $b=7$ число 8 не является решением неравенства $x-b\le 0$, так как при подстановке $x=8$ в неравенство получаем неверное числовое неравенство $8-7\le 0$ или $1\le 0$.

Решить неравенство с параметром — значит для каждого допустимого значения параметра найти множество всех решений данного неравенства или указать, что их нет.

Пример. Чтобы решить неравенство $ax<2$ при всех значениях параметра a, надо рассмотреть три случая:
1) $a<0$, поскольку при делении обеих частей исходного неравенства на отрицательное число изменяется знак неравенства;
2) $a=0$, поскольку деление на 0 невозможно;
3) $a>0$, поскольку при делении обеих частей исходного неравенства на положительное число знак неравенства не изменяется.

При решении задач с параметрами находят не только значения переменной, но и обязательно указывают, при каких значениях параметра они получены.

Выражение «При всех значениях параметра a» означает, что $a\in(-\infty;+\infty)$.

При решении неравенства с параметром необходимо пройти следующие этапы:

1. разбить область допустимых значений параметра на такие промежутки, что для всех значений параметра на каждом из них неравенство можно решить одним и тем же методом;
2. решить неравенство для каждого из промежутков значений параметра;

3 записать ответ, указывая значения переменной для значений параметра на каждом промежутке.

> *Пример.* Решая неравенство $ax<2$ для всех значений параметра a, имеем:
> 1) при $a<0$ $\quad ax<2 \Leftrightarrow x>\frac{2}{a}$;
> 2) при $a=0$ неравенство принимает вид $0 \cdot x<2$ или $0<2$, что верно при всех значениях x;
> 3) при $a>0$ $\quad ax<2 \Leftrightarrow x<\frac{2}{a}$.
> *Запись ответа практически повторяет решение.*
> Ответ: если $a<0$, то $x>\frac{2}{a}$; если $a=0$, то x — любое число; если $a>0$, то $x<\frac{2}{a}$.

Типы задач с параметрами

- Ставится задача найти решения неравенства при всех допустимых значениях параметра.

  «Для всех значений параметра решите неравенство...»

- Ставится задача найти значения параметра, при каждом из которых соответствующие решения неравенства обладают некоторыми заданными свойствами.

  «Найдите все значения параметра, при каждом из которых решения неравенства удовлетворяют условиям...»

1.9. Квадратные неравенства с параметром

Квадратными неравенствами с параметрами являются неравенства типа $x^2-2x-b\leq 0$, $x^2+p>0$, $x^2-2ax+1\geq 0$ и другие, содержащие кроме переменной x переменные величины b, p, a и другие, которые также могут принимать различные числовые значения.

Неравенство типа $ax^2+x+5>0$ не при всех a является квадратным. Поэтому при решении этого неравенства в самом начале необходимо рассмотреть случай $a=0$.

> *Пример.* 1) при $a=0$ неравенство $ax^2+x+5>0$ становится линейным: $x+5>0$;
> 2) при $a\neq 0$ неравенство $ax^2+x+5>0$ квадратное.

Чтобы решить квадратное неравенство с параметром, необходимо пройти три этапа решения любого неравенства с параметром.

Пример. Чтобы решить неравенство $x^2 \le a$ при всех значениях параметра a, надо рассмотреть три случая:
1) при $a<0$ неравенство $x^2 \le a$ не имеет решений, так как $x^2 \ge 0$ при всех x;
2) при $a=0$ $x^2 \le 0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$, и неравенство имеет единственное решение;
3) при $a>0$ $x^2 \le a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \le x \le \sqrt{a}$.
Ответ: при $a<0$ решений нет; при $a=0$ $x=0$; при $a>0$ $x \in \left[-\sqrt{a};\ \sqrt{a}\right]$.

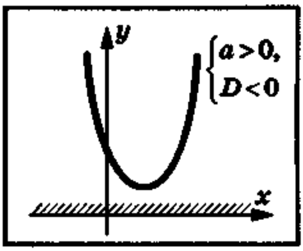
Параметр не всегда может принимать все числовые значения. В этом случае при решении неравенства рассматривают только допустимые значения параметра, то есть те значения, при которых выражение, содержащее параметр, определено.

Пример. Для неравенства $\frac{1}{a-2}x^2+5 \le 0$ допустимыми значениями параметра a являются все числа, кроме числа 2. Поэтому при решении этого неравенства надо рассмотреть только два случая: 1) $a-2<0$ и 2) $a-2>0$.

Чтобы определить условия, при которых квадратное неравенство $ax^2+bx+c>0$ является верным для всех значений переменной x (то есть любое число является решением неравенства), нужно рассмотреть два случая.

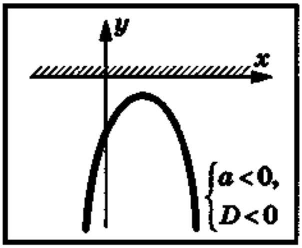
1. При $a=0$ неравенство $ax^2+bx+c>0$ принимает вид $bx+c>0$, и оно верно для всех значений переменной x, если $b=0$, $c>0$.

2. При $a \ne 0$ неравенство $ax^2+bx+c>0$ является квадратным, и оно верно для всех значений переменной x тогда и только тогда, когда парабола $y=ax^2+bx+c$ целиком расположена выше оси Ox: $\begin{cases} a>0, \\ D<0. \end{cases}$



Аналогично квадратное неравенство $ax^2+bx+c\geq 0$ верно для всех значений переменной x тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a>0, \\ D\leq 0. \end{cases}$

Квадратное неравенство $ax^2+bx+c<0$ верно для всех значений переменной x тогда и только тогда, когда парабола $y=ax^2+bx+c$ целиком расположена ниже оси Ox, то есть выполняются условия: $\begin{cases} a<0, \\ D<0. \end{cases}$



1.10. Метод интервалов

Рассмотрим последовательность решения рациональных неравенств вида $h(x)>g(x)$ методом интервалов.

Решение рациональных неравенств методом интервалов

1 Используя правила равносильности неравенств, приведём неравенство $h(x)>g(x)$ к виду $f(x)>0$, где $f(x)$ — алгебраическая дробь. Если знаменатель дроби — число, то $f(x)$ является многочленом.

Примеры: 1) $\frac{x^2}{6-2x}>\frac{x}{3-x}\Leftrightarrow\frac{x^2}{2(3-x)}-\frac{x}{3-x}>0\Leftrightarrow\frac{x^2-2x}{2(3-x)}>0;$

2) $x^3>x\Leftrightarrow x^3-x>0.$

2 Разложим на множители числитель и знаменатель алгебраической дроби $f(x)$. Если числитель или знаменатель — квадратный трёхчлен, то используют формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена.

Примеры: 1) $\frac{x^2-2x}{2(3-x)}>0\Leftrightarrow\frac{x(x-2)}{2(3-x)}>0;$

2) $x^3-x>0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)>0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0.$

Дальнейшее решение проводить удобнее, когда множители числителя и знаменателя имеют вид: $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, $(x-a_3)$, ... Этого можно достичь, используя правила равносильности неравенств.

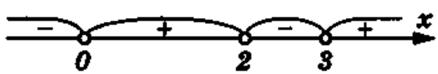
3 **Найдём значения x, в которых: а) числитель дроби $f(x)$ равен нулю; б) знаменатель дроби $f(x)$ равен нулю.**

Пример. Для дроби $f(x)=\frac{x(x-2)}{x-3}$:

а) числитель $x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2, \end{array}\right.$ б) знаменатель $x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$

4 **Отметим найденные значения на числовой прямой. Числовая прямая разбивается отмеченными точками на промежутки, на каждом из которых $f(x)$ сохраняет постоянный знак. Этот знак на каждом из полученных промежутков следует определять вычислением в «удобных» точках, взятых внутри этих промежутков.**

Пример. Определим знаки значений дроби $f(x)=\frac{x(x-2)}{x-3}$ в «удобных» точках промежутков: $f(4)=\frac{4(4-2)}{4-3}>0$, $f(2{,}5)=\frac{2{,}5(2{,}5-2)}{2{,}5-3}<0$, $f(1)=\frac{1(1-2)}{1-3}>0$, $f(-1)=\frac{-1(-1-2)}{-1-3}<0$, и отметим их на числовой прямой:



5 **Выберем те промежутки, на которых неравенство становится верным, и запишем ответ.**

Пример. Отметим те промежутки, для которых $\frac{x(x-2)}{x-3}<0$:

Ответ: $(-\infty; 0)\cup(2; 3)$.

Глава 1

Примеры решения задач

Задача 1.

Какое из чисел является рациональным?

1) $\sqrt{900}$ 2) $\sqrt{\dfrac{9}{10}}$ 3) $\sqrt{9000}$ 4) ни одно из этих чисел

Решение.

$\sqrt{900}=30$, $\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sqrt{9000}=\sqrt{900}\cdot\sqrt{10}=30\sqrt{10}$.

Поскольку $\sqrt{10}$ — иррациональное число, то только число $\sqrt{900}$ является рациональным.

Номер верного ответа: 1.

Задача 2.

Тираж газеты «Аргументы и факты» составляет около 2 млн 990 тыс. экземпляров. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $2{,}99\cdot10^4$ 2) $2{,}99\cdot10^6$ 3) $2{,}99\cdot10^7$ 4) $2{,}99\cdot10^5$

Решение.

2 млн 990 тыс. = 2 990 000 = $2{,}99\cdot10^6$, причём $1\le 2{,}99<10$.

Номер верного ответа: 2.

Задача 3.

Какое из следующих неравенств нельзя получить из неравенства $b<a+c$?

1) $b-c<a$ 2) $a>b-c$ 3) $a-b+c>0$ 4) $b-a-c>0$

Решение.

Если $b<a+c$, то $b-c<a$ (*Свойство 3*). Если $b<a+c$, то $a+c>b$. Отсюда получаем $a>b-c$ и $a-b+c>0$ (*Свойство 3*). Однако из $b<a+c$ получаем $b-a-c<0$. Итак, неравенство 4) нельзя получить из неравенства $b<a+c$.

Номер верного ответа: 4.

Задача 4.

Расположите в порядке убывания следующие числа: 0,0802; 0,08; 0,208.

1) 0,0802; 0,08; 0,208
2) 0,08; 0,0802; 0,208
3) 0,208; 0,0802; 0,08
4) 0,208; 0,08; 0,0802

Решение.

Поскольку 0,208 > 0,0802, а 0,0802 > 0,08, то данные числа в порядке убывания должны быть расположены так: 0,208; 0,0802; 0,08.

Номер верного ответа: 3.

Задача 5.

Численность населения Индии составляет 880 млн человек, а Китая — 1 млрд 300 млн человек. Во сколько раз численность населения Китая больше численности населения Индии?

1) не более 1,5 раза
2) менее 1,3 раза
3) не менее 2 раз
4) более 1,5 раза

Решение.

Найдём отношение численности населения Китая к численности населения Индии. $\frac{1300000000}{880000000}=\frac{1{,}3\cdot10^9}{8{,}8\cdot10^8}=\frac{1{,}3\cdot10}{8{,}8}=\frac{130}{88}\approx1{,}477.$

Поскольку неравенство $1{,}477\le1{,}5$ верно, а неравенства $1{,}477<1{,}3$, $1{,}477\ge2$ и $1{,}477>1{,}5$ неверны, то численность населения Китая больше численности населения Индии не более чем в 1,5 раза.

Номер верного ответа: 1.

Задача 6.

Укажите наибольшее рациональное число из чисел:

1) $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$ 2) 0,5 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\sqrt{5}$

Решение.

Число $\sqrt{5}$ иррациональное. Поскольку $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2=1$ и $1>0{,}5$, $1>\frac{1}{5}$, то наибольшее рациональное число из данных чисел — это $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Номер верного ответа: 1.

Задача 7.

Решите неравенство $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}$.

Решение.

Чтобы освободиться от дробей, умножим обе части неравенства на 24 (*Правило 2*): $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}\Leftrightarrow72-36x>15-4(4x-3)$.

Раскроем скобки и, используя *Правило 1*, запишем неравенство так, чтобы слева были слагаемые, содержащие переменные, а справа — числа: $72-36x>15-4(4x-3)\Leftrightarrow 72-36x>$ $>15-16x+12\Leftrightarrow -36x+16x>15+12-72\Leftrightarrow -20x>-45$.

Разделим обе части неравенства на -20, изменив при этом знак неравенства на противоположный (*Правило 4*):

$$-20x>-45\Leftrightarrow x<\frac{-45}{-20}\Leftrightarrow x<\frac{9}{4}\Leftrightarrow x<2\frac{1}{4}.$$

Ответ: $x<2\frac{1}{4}$.

Задача 8.

Найдите все значения переменной a, при каждом из которых значение выражения $a\left(\frac{a}{3}-5\right)-\frac{a^2-14}{3}+4a$ неотрицательно.

Решение.

Найти все значения a, при каждом из которых значение данного выражения неотрицательно (то есть положительно или равно нулю) — это значит решить неравенство: $a\left(\frac{a}{3}-5\right)-\frac{a^2-14}{3}+4a\geq 0$.

Раскроем скобки, а затем умножим обе части неравенства на 3 (*Правило 2*):

$$a\left(\frac{a}{3}-5\right)-\frac{a^2-14}{3}+4a\geq 0\Leftrightarrow a^2-15a-a^2+14+12a\geq 0\Leftrightarrow -3a+14\geq 0.$$

Откуда, используя *Правила 1* и *4*, получим:

$$-3a+14\geq 0\Leftrightarrow -3a\geq -14\Leftrightarrow a\leq\frac{-14}{-3}\Leftrightarrow a\leq 4\frac{2}{3}.$$

Ответ: $a\leq 4\frac{2}{3}$.

Задача 9.

Укажите промежуток, являющийся решением системы неравенств $\begin{cases}x\geq a,\\ x\leq b\end{cases}$ при условии, что $a<b$.

Решение.

Решениями первого и второго неравенств данной системы являются промежутки $[a;+\infty)$ и $(-\infty;b]$. Их пересечение при условии $a<b$ — отрезок $[a;b]$ — является решением системы неравенств.

Ответ: $[a;b]$.

Задача 10.

Решите систему неравенств $\begin{cases} 3-\dfrac{3x}{2}>\dfrac{5}{8}-\dfrac{4x-3}{6}, \\ 5\left(-\dfrac{1}{2}x+3\right)+\dfrac{7}{4}\geq 3-\dfrac{3}{2}x. \end{cases}$

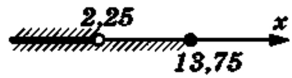
Решение.

Чтобы решить систему двух неравенств, сначала решим каждое неравенство отдельно. Решая первое неравенство системы, получим: $x<2{,}25$.

Решая второе неравенство системы, получим: $x\leq 13{,}75$.

Решение исходной системы сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} x<2{,}25, \\ x\leq 13{,}75. \end{cases}$

Изобразим решения неравенств промежутками координатной прямой, и найдём их пересечение.



Ответ: $(-\infty; 2{,}25)$.

Задача 11.

Отметьте на координатной прямой решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x<a, \\ x>b \end{array}\right.$ **при условии, что** $a<b$.

Решение.

Решениями первого и второго неравенств данной совокупности являются промежутки $(-\infty; a)$ и $(b; +\infty)$. Решением совокупности неравенств является объединение этих промежутков.

Ответ: $(-\infty; a)\cup(b; +\infty)$.

Задача 12.

При каких значениях x значения выражения $4-x$ принадлежат отрезку $[0; 2]$?

Решение.

Значения выражения $4-x$ принадлежат отрезку $[0; 2]$ при всех x, для которых выполняется условие: $0\leq 4-x\leq 2$. Решим двойное неравенство:

1) прибавим (-4) ко всем частям неравенства:
$0\leq 4-x\leq 2 \Leftrightarrow -4\leq -x\leq -2$;

2) умножим все части неравенства на (-1), изменив оба знака неравенства на противоположные: $-4\leq -x\leq -2 \Leftrightarrow 4\geq x\geq 2 \Leftrightarrow 2\leq x\leq 4$;

3) изобразим решения неравенств промежутками координатной прямой и найдём их пересечение.

Ответ: $[2;\,4]$.

Задача 13.

Решите неравенство $|3x-1|\le 4$.

Решение.

Поскольку при $a\ge 0$ $|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a$, то $|3x-1|\le 4 \Leftrightarrow -4\le 3x-1\le 4$.

Решим двойное неравенство:

$$-4\le 3x-1\le 4 \Leftrightarrow -3\le 3x\le 5 \Leftrightarrow -1\le x\le \frac{5}{3} \Leftrightarrow -1\le x\le 1\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left[-1;\,1\frac{2}{3}\right]$.

Задача 14.

Решите неравенство $|1-3x|\ge 4$.

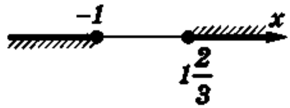
Решение.

Поскольку при $a\ge 0$

$|x|\ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -a, \\ x\ge a, \end{array}\right.$ то

$$|1-3x|\ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-3x\le -4, \\ 1-3x\ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x\le -5, \\ -3x\ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \frac{5}{3}, \\ x\le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1, \\ x\ge 1\frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Изобразим решения неравенств промежутками координатной прямой и найдём их объединение.



Ответ: $(-\infty;-1]\cup\left[1\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Задача 15.

Решите неравенство $3x^2-5x-2>0$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y=3x^2-5x-2$. Отметим, что $3>0$.

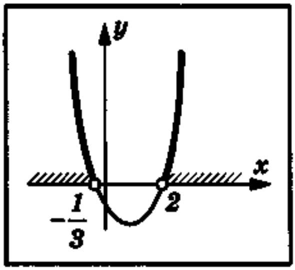
1) Найдём значения x, при которых $y=0$. Для этого решим уравнение $3x^2-5x-2=0$. Вычислим дискриминант $D=b^2-4ac=25-4\cdot 3\cdot(-2)=49$. Так как $D>0$, то квадратное уравнение имеет два различных корня: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5-7}{2\cdot 3}=-\dfrac{1}{3}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5+7}{2\cdot 3}=2$.

2) Построим схематично график квадратичной функции $y=3x^2-5x-2$.

Парабола пересекает ось Ox в точках $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=2$.

3) Найдём значения x, для которых $3x^2-5x-2>0$ $(y>0)$, то есть определим промежутки на оси Ox, где части параболы лежат выше оси Ox, и нанесём соответствующую штриховку.

Решением неравенства является объединение двух промежутков: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и $(2; +\infty)$.



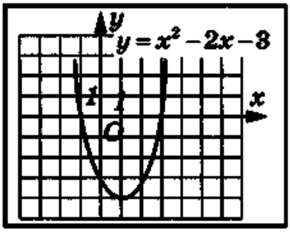
Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)\cup(2; +\infty)$.

Задача 16.

На рисунке изображён график функции $y=x^2-2x-3$. Используя график, решите неравенство $x^2-3<2x$.

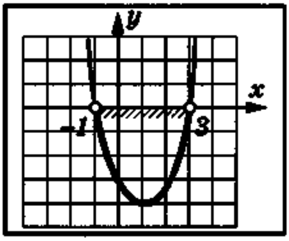
1) $(-\infty; +\infty)$ 3) $(3; +\infty)$

2) $(-1; 3)$ 4) $(-\infty; -1)\cup(3; +\infty)$



Решение.

Перепишем данное неравенство в виде $x^2-2x-3<0$. По графику функции определим значения x, при которых $y=0$: $x_1=-1$, $x_2=3$. Найдём значения x, для которых $x^2-2x-3<0$ $(y<0)$, то есть определим промежутки на оси Ox, где часть параболы лежит ниже оси Ox, и нанесём соответствующую штриховку.



Номер верного ответа: 2.

Задача 17.

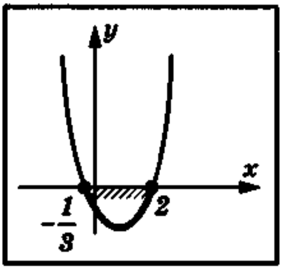
Решите неравенство $3x^2-5x-2\le 0$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y=3x^2-5x-2$. Отметим, что $3>0$.

1) Значения x, при которых $y=0$, равны: $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=2$.

2) Построим схематично график функции $y=3x^2-5x-2$.



3) Найдём значения x, для которых $3x^2-5x-2\le0$ (или $y\le0$), то есть определим промежуток на оси Ox, где часть параболы лежит ниже оси Ox, и нанесём соответствующую штриховку. Затем включим точки, в которых парабола пересекает ось Ox.
Решением неравенства является отрезок: $\left[-\frac{1}{3};\,2\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};\,2\right]$.

Задача 18.

Выясните, имеет ли решения неравенство $x^2+4x+2x\sqrt{6}+20\le0$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде $x^2+x\left(4+2\sqrt{6}\right)+20\le0$.
Найдём дискриминант квадратного уравнения $x^2+x\left(4+2\sqrt{6}\right)+20=0$.
Он равен: $D=\left(4+2\sqrt{6}\right)^2-4\cdot20=16+16\sqrt{6}+24-80=16\sqrt{6}-40=8\left(2\sqrt{6}-5\right)$.
Чтобы определить знак дискриминанта, сравним числа $2\sqrt{6}$ и 5.
Для положительных чисел a и b если $a^2<b^2$, то $a<b$. Сравним квадраты чисел $2\sqrt{6}$ и 5. Поскольку $\left(2\sqrt{6}\right)^2=24$, $5^2=25$ и $24<25$, то $\left(2\sqrt{6}\right)^2<5^2$. Следовательно, $2\sqrt{6}<5$, $2\sqrt{6}-5<0$ и дискриминант $D<0$.
Графиком функции $y=x^2+2x\left(2+\sqrt{6}\right)+20$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Так как $D<0$, то парабола целиком расположена выше оси Ox. Следовательно, неравенство $x^2+x\left(4+2\sqrt{6}\right)+20\le0$ решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Задача 19.

Для всех значений параметра a решите неравенство $(a-2)x-1\ge0$.

Решение.

Запишем данное неравенство в виде $(a-2)x\ge1$ и рассмотрим три случая.

1) $a-2<0$ или $a<2$. При этом $(a-2)x\ge1\Leftrightarrow x\le\frac{1}{a-2}$. Знак неравенства изменился на противоположный, поскольку выражение $(a-2)$ отрицательно.

2) $a-2=0$ или $a=2$. При этом исходное неравенство принимает вид: $0\cdot x\geq 1$ или $0\geq 1$. Числовое неравенство неверно, следовательно, при $a=2$ исходное неравенство не имеет решений.

3) $a-2>0$ или $a>2$. При этом $(a-2)x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{a-2}$. Знак неравенства не изменился, поскольку выражение $(a-2)$ положительно.

Ответ может быть записан как с помощью простейших неравенств, так и с помощью числовых промежутков.

Ответ: при $a\in(-\infty;2)$ $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a-2}\right]$; при $a=2$ решений нет; при $a\in(2;+\infty)$ $x\in\left[\frac{1}{a-2};+\infty\right)$.

Задача 20.

Для всех значений параметра b решите неравенство $5x-b\geq 0$.

Решение.

Используя *Правила 1* и *2* равносильности неравенств, получим: $5x-b\geq 0 \Leftrightarrow 5x\geq b \Leftrightarrow x\geq \frac{b}{5}$. Таким образом, при всех b, то есть при $b\in(-\infty;+\infty)$, исходное неравенство равносильно неравенству $x\geq\frac{b}{5}$.

Ответ: при $b\in(-\infty;+\infty)$ $x\in\left[\frac{b}{5};+\infty\right)$.

Задача 21.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число 3 является одним из решений неравенства $(a-2)x-1\geq 0$.

Решение.

Число 3 является решением данного неравенства — это значит, что при его подстановке в неравенство получается верное числовое неравенство. Поэтому должно выполняться неравенство $(a-2)\cdot 3-1\geq 0$.

Итак, $(a-2)\cdot 3-1\geq 0 \Leftrightarrow 3a-6-1\geq 0 \Leftrightarrow 3a\geq 7 \Leftrightarrow a\geq\frac{7}{3}$. Таким образом, при любом $a\geq\frac{7}{3}$ число 3 является одним из решений неравенства.

Ответ: $\left[\frac{7}{3};+\infty\right)$.

Задача 22.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+4x+2ax+8a+1<0$ не имеет решений.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде: $x^2+2x(2+a)+8a+1<0$. Рассмотрим функцию $y=x^2+2x(2+a)+8a+1$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Неравенство $x^2+2x(2+a)+8a+1<0$ не имеет решений — это значит, что никакая часть графика функции $y=x^2+2x(2+a)+8a+1$ не лежит ниже оси Ox. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трёхчлена $D\le 0$. Вычислим: $\frac{D}{4}=(2+a)^2-(8a+1)=a^2-4a+3$.

Решая неравенство $a^2-4a+3\le 0$, получим: $1\le a\le 3$.

Ответ: $[1;\ 3]$.

Задача 23.

Найдите все значения параметра p, при каждом из которых неравенство $px^2-6x+p+8<0$ верно для всех значений переменной x.

Решение.

Поскольку коэффициент при x^2 зависит от параметра p, рассмотрим три случая.

1) $p=0$. Исходное неравенство принимает вид: $-6x+8<0$ или $x>\frac{4}{3}$. Это неравенство верно не для всех значений переменной x (а только для значений, больших $\frac{4}{3}$), следовательно, значение параметра $p=0$ не удовлетворяет условию задачи.

2) $p>0$. Графиком функции $y=px^2-6x+p+8$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Такая парабола не может целиком лежать ниже оси Ox, следовательно, исходное неравенство не может быть верно для всех значений x. Таким образом, значения параметра $p>0$ не удовлетворяют условию задачи.

3) $p<0$. Графиком функции $y=px^2-6x+p+8$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Такая парабола целиком лежит ниже оси Ox тогда и только тогда, когда $D<0$. Вычислим: $\frac{D}{4}=3^2-p(p+8)=-p^2-8p+9$.

Получаем: $-p^2-8p+9<0\Leftrightarrow p^2+8p-9>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p<-9,\\ p>1.\end{array}\right.$ Условию $p<0$ удовлетворяет лишь неравенство $p<-9$.

Ответ: $(-\infty;\ -9)$.

Задача 24.

Решите неравенство $\dfrac{2(x+1)}{14-7x}>0.$

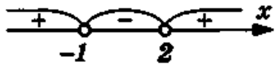
Решение.

$\dfrac{2(x+1)}{14-7x}>0\Leftrightarrow\dfrac{2(x+1)}{-7(x-2)}>0.$ Умножим обе части неравенства на $-\dfrac{7}{2}$, используя *Правило 4*: $\dfrac{2(x+1)}{-7(x-2)}>0\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x-2}<0.$ Рассмотрим дробь $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$. Найдём значения x, при которых: а) числитель дроби равен нулю: $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$; б) знаменатель дроби равен нулю: $x-2=0\Leftrightarrow x=2.$

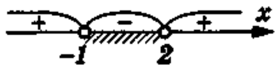
Отметим найденные значения на числовой прямой. Числовая прямая разбивается отмеченными точками на три промежутка, на каждом из которых дробь $f(x)$ сохраняет постоянный знак.

Если в записи дроби $f(x)=\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(x-a_4)(x-a_5)(x-a_6)}$ все a_1, a_2, a_3, ... различны, то можно пользоваться «правилом чередования знаков»: на промежутке правее самой правой из выделенных точек $f(x)>0$, а далее на промежутках знаки чередуются.

В данном случае можно воспользоваться «правилом чередования знаков». На самом правом промежутке $(2;+\infty)$ дробь $f(x)$ положительна, а далее на промежутках знаки чередуются:



Отметим промежуток, для которого $\dfrac{x+1}{x-2}<0.$



Ответ: $(-1;\,2).$

Задача 25.

Решите неравенство $\dfrac{2(x+1)}{14-7x}\ge 0.$

Решение.

Решение данного нестрогого рационального неравенства повторяет решение предыдущей задачи, однако требуется включить ещё и значения переменной, при которых дробь $f(x)$ равна нулю, то есть числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю. В данном случае дробь $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ равна нулю при $x=-1$. Отметим полученное значение тёмным кружком на числовой прямой и включим в ответ.

Ответ: $[-1;\,2).$

Глава 2. Системы уравнений

2.1. Рациональные уравнения с двумя переменными

Рациональным выражением с двумя переменными x и y называется алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменных x и y с помощью арифметических операций и возведения в натуральную степень.

Переменные называют ещё неизвестными. Обозначать их можно различными буквами, например a и b, u и v.

Рациональным уравнением с двумя переменными x и y называется уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями с двумя переменными x и y.

Пример. x^2+y-2, $\dfrac{(x-1)^2-3}{x+y}$ — рациональные выражения;

$x=y$, $x^2=4-y^2$, $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{2y}=4$ — рациональные уравнения.

Решением рационального уравнения с двумя переменными называют пару чисел, которые при подстановке в уравнение обращают его в верное числовое равенство.

Пример. Пара чисел $(6; 2)$ является решением уравнения $xy=12$, так как при подстановке в уравнение $x=6$, $y=2$ получаем верное числовое равенство $6\cdot2=12$.

Решить уравнение — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Два уравнения называются равносильными, если они имеют одни и те же решения или когда они оба не имеют решений.

Для записи равносильности уравнений используют символ $\Leftrightarrow$.

При решении уравнений исходное уравнение стараются заменить более простым, но равносильным ему. При этом символ равносильности $\Leftrightarrow$ допустимо не записывать.

Правила равносильности уравнений

1 **Если из одной части уравнения перенести слагаемые в другую часть с противоположными знаками, то полученное уравнение будет равносильно исходному.**

Из Правила 1 следует, что любое рациональное уравнение равносильно уравнению $p(x; y)=0$, где $p(x; y)$ — рациональное выражение.

2 **Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число или выражение, существующее и отличное от нуля при всех значениях переменных, то полученное уравнение будет равносильно исходному.**

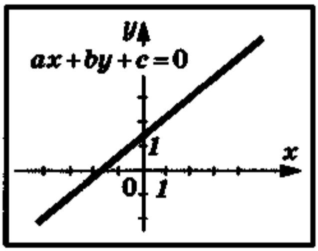
Примеры: 1) $x=2y+2 \Leftrightarrow x-2y-2=0$; 2) $xy=12 \Leftrightarrow 2xy=24$;
3) $\frac{x+5}{x^2+1}=\frac{y}{2(x^2+1)} \Leftrightarrow 2(x+5)=y$.

Графиком уравнения $p(x; y)=0$ с двумя переменными x и y называют множество всех точек координатной плоскости xOy с такими координатами $(x; y)$, что каждая пара $(x; y)$ является решением этого уравнения.

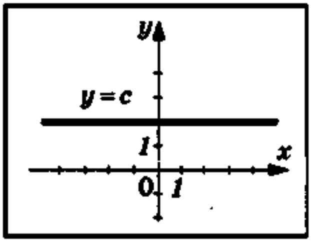
Если в рациональном уравнении $p(x; y)=0$ удаётся выразить переменную y как функцию переменной x, то есть записать данное уравнение в виде $y=f(x)$, то график уравнения $p(x; y)=0$ является одновременно и графиком функции $y=f(x)$.

Графики некоторых уравнений

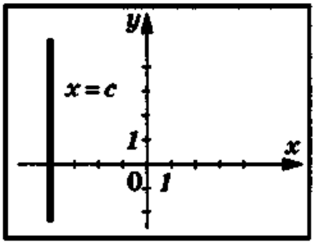
- **Графиком уравнения $ax+by+c=0$ (a и b не равны нулю одновременно) является прямая.**



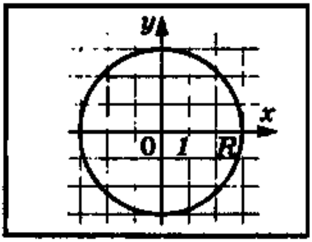
- Графиком уравнения $y=c$ является прямая, параллельная оси x, проходящая через точку с координатами $(0; c)$.



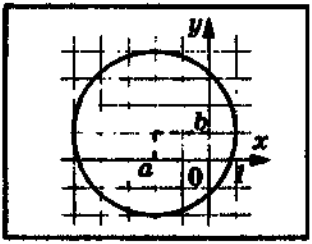
- Графиком уравнения $x=c$ является прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку с координатами $(c; 0)$.



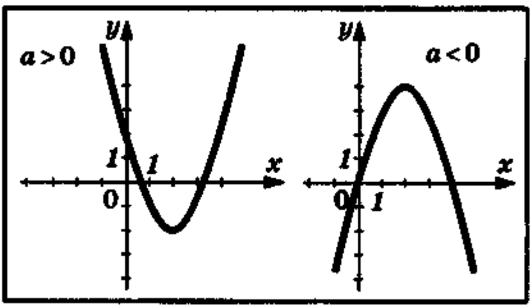
- Графиком уравнения $x^2+y^2=R^2$ является окружность радиусом R с центром в начале координат.



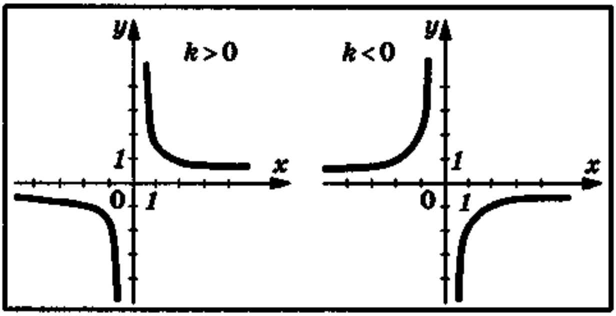
- Графиком уравнения $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ является окружность радиусом R с центром в точке с координатами $(a; b)$.



- Графиком уравнения $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ является парабола.



• Графиком уравнения $xy = k$, $k \neq 0$ является гипербола.



2.2. Решение систем уравнений. Метод подстановки

Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару чисел, которые при подстановке в эту систему обращают каждое её уравнение в верное равенство.

Для записи системы уравнений используют фигурную скобку слева.

Пример. Пара чисел (6; 2) является решением системы $\begin{cases} xy = 12, \\ x - 2y - 2 = 0, \end{cases}$ так как при подстановке в её уравнения $x = 6$, $y = 2$ получаем систему верных числовых равенств: $\begin{cases} 6 \cdot 2 = 12, \\ 6 - 2 \cdot 2 - 2 = 0. \end{cases}$

Если пара чисел удовлетворяет хотя бы одному из данных уравнений с двумя переменными, то говорят, что эта пара чисел является решением совокупности уравнений.

Для записи совокупности уравнений используют квадратную скобку слева.

Пример. Например, пары чисел (6; 2); (3; 4); (4; 3) являются решениями совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} xy = 12, \\ x - 2y - 2 = 0, \end{array}\right.$ так как при подстановке чисел каждой пары в первое уравнение получаем верное числовое равенство.

А пары чисел (4; 1) и (8; 3) являются решениями этой же совокупности уравнений, так как при подстановке чисел каждой пары во второе уравнение получаем верное числовое равенство.

Решить систему (или совокупность) уравнений — это значит найти все её решения или установить, что их нет. В первом случае систему называют **совместной**, во втором — **несовместной**.

> **!** Две системы (или совокупности) называются **равносильными**, если они имеют одни и те же решения или обе решений не имеют.

Для записи равносильных систем (или совокупностей) используют символ ⇔.

Правила равносильности систем уравнений

1. Если в системе переставить местами любые два уравнения, то полученная система будет равносильна исходной.

Пример.

$$\begin{cases} x-2y-2=0, \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=12, \\ x-2y-2=0. \end{cases}$$

2. Если одно из уравнений системы заменить равносильным ему уравнением, то полученная система будет равносильна исходной.

Пример.

$$\begin{cases} x-2y-2=0, \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+2, \\ xy=12. \end{cases}$$

3. Если одну из переменных выразить в каком-либо уравнении системы через другую и найденное выражение подставить в другое уравнение, то полученная система будет равносильна исходной.

Пример.

$$\begin{cases} x-2y-2=0, \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+2, \\ (2y+2)y=12. \end{cases}$$

***Метод подстановки** (Правило 3) можно применять, когда в каком-либо уравнении системы с помощью преобразований удаётся выразить одну переменную через другую (в частности, когда одно из уравнений системы линейное).*

2.3. Решение систем уравнений. Метод алгебраического сложения. Метод разложения на множители

Правила равносильности систем уравнений

4 Если одно уравнение системы заменить уравнением, полученным путём сложения уравнений системы, то полученная система будет равносильна исходной.

При сложении уравнений системы складывают соответственно левые и правые части уравнений.

Пример. $\begin{cases} 2xy=1, \\ x^2+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=1, \\ x^2+y^2+2xy=3+1. \end{cases}$

Из правил 2 и 4 следует:

4* если одно уравнение системы заменить уравнением, полученным путём сложения уравнений системы, каждое из которых умножено на некоторое положительное или отрицательное число, то полученная система будет равносильна исходной.

Пример. $\begin{cases} xy=3, \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=6, \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=6, \\ x^2+y^2+2xy=10+6. \end{cases}$

Метод алгебраического сложения (Правило 4) применяется в случае, когда в результате сложения уравнений системы получается более простое уравнение, чем исходные уравнения системы. Для дальнейшего решения системы могут быть использованы метод подстановки или метод разложения на множители.

Нередко при упрощении системы удаётся представить одно уравнение системы в виде равного нулю произведения множителей. В этом случае уравнение равносильно совокупности более простых уравнений. Так как произведение двух множителей равно нулю, когда хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом существует.

Примеры: 1) $xy+y=0 \Leftrightarrow (x+1)y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ y=0; \end{array}\right.$

2) $(x+y)^2-49=0 \Leftrightarrow (x+y-7)(x+y+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-7=0, \\ x+y+7=0. \end{array}\right.$

5 **Если одно из уравнений системы равносильно совокупности двух уравнений, то исходная система равносильна совокупности двух систем, каждая из которых содержит одно уравнение совокупности и оставшееся уравнение системы.**

Метод разложения на множители (Правило 5) применяется при решении системы уравнений в том случае, когда одно уравнение системы удаётся представить в виде равного нулю произведения множителей. При этом исходная система заменяется равносильной ей совокупностью двух более простых систем уравнений.

Правило 5 позволяет записывать решение системы с помощью символа равносильности $\Leftrightarrow$, переходя от системы к совокупности двух систем.

Примеры: 1) $\begin{cases}(x+1)y=0,\\ x^2-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1=0,\\ x^2-y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}y=0,\\ x^2-y=1;\end{cases}\end{array}\right.$

2) $\begin{cases}xy=3,\\ (x+y-7)(x+y+7)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=3,\\ x+y-7=0,\end{cases}\\ \begin{cases}xy=3,\\ x+y+7=0.\end{cases}\end{array}\right.$

2.4. Решение систем уравнений. Метод введения новых переменных

Метод введения новых переменных состоит в том, что некоторые выражения, составленные из исходных переменных, принимаются за новые переменные. В результате получается более простая система уравнений относительно новых переменных.

Пример. Для решения системы уравнений $\begin{cases}3x-y+\dfrac{5}{y-1}=10,\\ 3x-y-\dfrac{10}{y-1}=7\end{cases}$

введём новые переменные: $a=3x-y$ и $b=\dfrac{5}{y-1}$. Данная система относительно новых переменных принимает вид: $\begin{cases}a+b=10,\\ a-2b=7.\end{cases}$

После того как полученная система решена, то есть найдены значения новых переменных, по ним вычисляются значения исходных переменных. Для этого должна быть решена система уравнений, выражающих зависимость между новыми и исходными переменными. При этом в систему вместо новых переменных следует подставлять их найденные значения.

Пример. Если найдены значения новых переменных $a=9$ и $b=1$, которые были введены по формулам $a=3x-y$ и $b=\dfrac{5}{y-1}$, то для вычисления значений исходных переменных следует решить систему $\begin{cases} 3x-y=9, \\ \dfrac{5}{y-1}=1. \end{cases}$

Использовать метод введения новых переменных можно как в двух уравнениях системы, так и только в одном из уравнений.

Способы введения новых переменных

- **Вводятся две новые переменные, которые используются в двух уравнениях системы.**

  При этом систему решают сначала относительно новых переменных, а затем вычисляют значения исходных переменных.

  Пример. Для решения системы уравнений $\begin{cases} (x-5)^2+\dfrac{5}{y-1}=10, \\ (x-5)^2-\dfrac{10}{y-1}=7 \end{cases}$ рационально ввести две новые переменные: $a=(x-5)^2$ и $b=\dfrac{5}{y-1}$. Данная система относительно новых переменных примет вид: $\begin{cases} a+b=10, \\ a-b=7. \end{cases}$

- **Вводится одна новая переменная, которую используют только в одном уравнении системы.**

  Полученное таким образом уравнение решают сначала относительно новой введённой переменной. Затем возвращаются к исходным переменным. При этом решение исходной системы уравнений сводится к решению одной или нескольких более простых систем (совокупности систем).

Пример. Для решения системы уравнений $\begin{cases}(xy)^2-16xy+39=0,\\ x^2+y^2=10\end{cases}$ рационально ввести одну новую переменную $t=xy$ в первом уравнении системы, которое примет вид: $t^2-16t+39=0$. Поскольку $t^2-16t+39=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=3,\\ t=13\end{array}\right.$ и $t=xy$, то исходная система равносильна совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=3,\\ x^2+y^2=10,\end{cases}\\ \begin{cases}xy=13,\\ x^2+y^2=10.\end{cases}\end{array}\right.$

2.5. Решение систем уравнений. Симметрические системы уравнений

Общего правила введения новых переменных при решении систем уравнений не существует. Однако для симметрических систем уравнений известны общие формулы введения новых переменных.

! **Многочлен от переменных x и y называется симметрическим, если при замене x на y, а y на x получается тождественно равный ему многочлен.**

Пример. x^2+xy+y^2 и $x^3+y^3+2x+2y+5$ — симметрические многочлены, а многочлен $x^3+x^2y+y^3$ симметрическим не является.

! **Если обе части всех уравнений системы можно представить в виде симметрических многочленов, то система называется симметрической.**

Пример. Системы уравнений $\begin{cases}(x+y)+xy=3,\\ xy(x+y)=2\end{cases}$ и $\begin{cases}x^2+3xy+y^2=61,\\ xy=12\end{cases}$ являются симметрическими, а система $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y=0,\\ xy-x+12=0\end{cases}$ несимметрическая.

Для симметрической системы двух уравнений с двумя переменными x, y новые переменные вводят по формулам:

$$\boxed{u = x + y, v = x \cdot y}$$

Пример. Симметрическая система уравнений $\begin{cases}(x+y)+xy=3,\\ xy(x+y)=2\end{cases}$ при введении новых переменных $u=x+y$, $v=x\cdot y$ принимает вид: $\begin{cases}u+v=3,\\ vu=2.\end{cases}$

Используя формулы сокращённого умножения, можно получить следующие полезные формулы, позволяющие заменять симметрические многочлены от переменных x и y многочленами от переменных u и v, где $u=x+y$, $v=x\cdot y$:

$$u=x+y, v=x\cdot y$$

$$x^2+y^2=x^2+y^2+2xy-2xy=(x+y)^2-2xy=u^2-2v;$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)(x^2+2xy+y^2-3xy)=u(u^2-3v);$$

$$x^4+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2.$$

Эти формулы лучше не заучивать, а получать всякий раз самостоятельно.

Пример. Относительно новых переменных u, v система $\begin{cases}x^2+3xy+y^2=61,\\ xy=12\end{cases}$ принимает вид $\begin{cases}u^2+v=61,\\ v=12,\end{cases}$ так как $x^2+3xy+y^2=(x+y)^2+xy=u^2+v$.

Если пара чисел $(a;\ b)$ — решение симметрической системы, то пара чисел $(b;\ a)$ также является решением этой системы.

Пример. Если $(-4;\ -3)$, $(4;\ 3)$ — решения симметрической системы $\begin{cases}x^2+3xy+y^2=61,\\ xy=12,\end{cases}$ то $(-3;\ -4)$, $(3;\ 4)$ также решения этой системы.

Если симметрическая система уравнений имеет единственное решение $(a;\ b)$, то $a=b$.

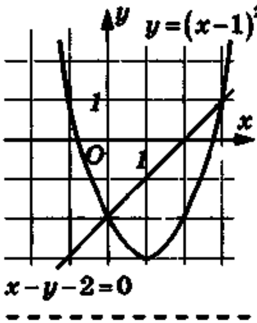
Если выражение в какой-либо части уравнения системы не является симметрическим многочленом, но при этом система уравнений с двумя переменными x и y при замене x на y, а y на x не изменяет своего вида, то новые переменные также вводят по формулам: $u=x+y$, $v=x\cdot y$.

2.6. Решение систем уравнений. Графический метод

Системы уравнений с двумя переменными иногда удобно решать графическим методом.

Суть графического метода решения системы уравнений с двумя переменными x и y состоит в построении графиков уравнений системы в координатной плоскости xOy и нахождении точек пересечения построенных графиков. Координаты каждой точки пересечения являются решением системы уравнений.

Пример. На рисунке изображены графики уравнений $y=(x-1)^2-3$ и $x-y-2=0$. Решениями системы $\begin{cases} y=(x-1)^2-3, \\ x-y-2=0 \end{cases}$ являются пары чисел $(0;\ -2)$, $(3;\ 1)$ — координаты двух точек пересечения графиков уравнений.



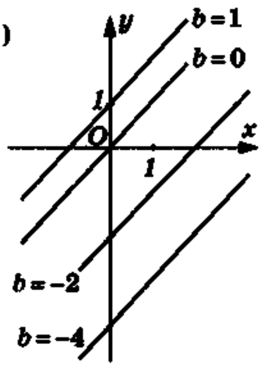
Графический метод требует обязательной проверки полученных решений!

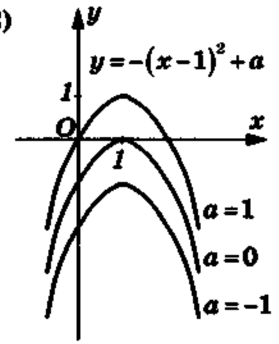
Только непосредственная подстановка каждой найденной пары значений переменных в уравнения исходной системы позволяет определить, является ли эта пара значений решением системы.

Графический метод позволяет определить количество решений системы и приближённые значения координат точек пересечения графиков уравнений.

Графический метод решения широко применяется при решении задач с параметрами. При этом одно уравнение с параметром задаёт целое семейство графиков (один график для каждого значения параметра).

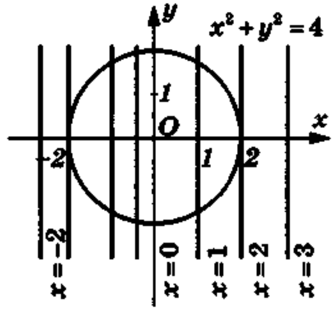
Примеры: 1) графики уравнения $y=x+b$ при различных значениях b образуют семейство параллельных прямых. На рисунке изображены графики уравнения $y=x+b$ при $b=1$, $b=0$, $b=-2$, $b=-4$; 2) график уравнения $y=-(x-1)^2+a$ при каждом значении a является параболой. На рисунке изображены графики уравнения $y=-(x-1)^2+a$ при $a=1$, $a=0$, $a=-1$.

1) 

2) 

Большинство задач с параметрами делятся на два типа. В частности, задача, в которой требуется найти все значения параметра, при каждом из которых система уравнений имеет заданное число решений, относится к задачам второго типа.

Пример. Чтобы найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x=a, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, построим окружность и семейство прямых, параллельных оси Oy. Значения параметра a, при которых графики уравнений имеют общие точки, удовлетворяют условию: $-2 \le a \le 2$.



2.7. Решение текстовых задач. Задачи на работу

Решение многих текстовых задач приводит к системе уравнений с несколькими переменными. Для решения текстовой задачи указанные в условии словесные соотношения между заданными и неизвестными величинами переводят на язык уравнений, неравенств и их систем. Важно при этом убедиться, что при составлении уравнений и неравенств были задействованы все данные условия задачи.

Этапы решения текстовой задачи

1. Выбор удобных переменных, их обозначение и точное словесное описание.
2. Составление уравнений, неравенств или их систем в соответствии с условием задачи.
3. Решение полученной математической задачи.
4. Выбор тех решений, которые удовлетворяют условиям задачи; нахождение искомой величины и запись ответа.

При решении текстовых задач во многих случаях целесообразно вводить не одну, а несколько переменных.

! **В задачах на работу рассматривают следующие величины:**
A — объём работы;
t — время выполнения работы;
p — производительность.

$\boxed{A = p\cdot t}$ $\boxed{t = \dfrac{A}{p}}$ $\boxed{p = \dfrac{A}{t}}$

Производительность — это скорость выполнения работы, рассматриваемая как количество работы, выполняемой в единицу времени.

Пример. Если токарь изготавливает 30 деталей в день (то есть его производительность $p=30$), то, работая с такой производительностью 5 дней (время $t=5$), он выполнит работу $A=p\cdot t$ по изготовлению $30\cdot 5=150$ деталей.

В задачах на совместную работу обычно рассматривают производительности двух или трёх участников действия, обозначая их производительности p_1, p_2 или p_1, p_2, p_3. Тогда их общая производительность при совместной работе есть сумма p_1+p_2 или $p_1+p_2+p_3$ соответственно.

$$A=(p_1+p_2)\cdot t, \qquad t=\frac{A}{p_1+p_2},\ p_1+p_2=\frac{A}{t}$$

$$A=(p_1+p_2+p_3)\cdot t, \qquad t=\frac{A}{p_1+p_2+p_3},\ p_1+p_2+p_3=\frac{A}{t}$$

Пример. Если два подъёмных крана с производительностями соответственно p_1 и p_2, работая вместе, выполнили работу A по разгрузке баржи за 6 часов, приходим к уравнению $A=(p_1+p_2)\cdot 6$.

При составлении уравнений часто используют не только всю работу, но и её доли.

Примеры: 1) если заказ на пошив новой коллекции пальто распределили между двумя компаниями в отношении 2:3, то первая компания должна выполнить $\frac{2}{5}A$, а вторая — $\frac{3}{5}A$, где A — полный объём работы по выполнению заказа;
2) если объёмы ежегодной добычи угля на первой, второй и третьей шахтах относятся как 9:10:20, то суммарный объём A добываемого угля за год можно представить в виде суммы: $A=9a+10a+20a$ или $A=39a$.

2.8. Решение текстовых задач. Задачи на движение

! В задачах на равномерное движение рассматривают следующие величины:
S — пройденный путь;
t — время движения;
v — скорость движения.

$$\boxed{S=v\cdot t} \quad \boxed{t=\frac{S}{v}} \quad \boxed{v=\frac{S}{t}}$$

Движение считают равномерным, если в задаче специально не оговорено другое.

При решении задач на движение необходимо помнить следующее

- Скорость движения объекта (например, катера) **по течению** реки равна сумме собственной скорости объекта и скорости течения реки: $\boxed{v = v_{катера} + v_{реки}}$
- Скорость движения плота по реке равна скорости течения реки, так как собственная скорость плота равна 0. $\boxed{v_{плота} = v_{реки}}$
- Скорость движения объекта **против течения** реки равна разности собственной скорости объекта и скорости течения реки: $\boxed{v = v_{катера} - v_{реки}}$

> *Пример.* Если от пристани вниз по течению реки одновременно отправились катер, скорость которого в стоячей воде (собственная скорость) равна 30 км/ч, и плот, то расстояние между катером и плотом после 2 часов пути будет равно $(30+v_{реки})\cdot 2 - v_{реки}\cdot 2 = 60$ км.

- При движении двух объектов **навстречу друг другу** со скоростями v_1 и v_2 скорость их сближения равна сумме скоростей $v_1 + v_2$.

> *Пример.* Если два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов, расстояние между которыми равно 6 км, и встретились через 1 час 20 минут, то скорость их сближения $v_1 + v_2 = 6 : 1\frac{1}{3} = 4{,}5$ км/ч.

- При движении **первого объекта за вторым в одном направлении** со скоростями v_1 и v_2 соответственно, то:
  а) если $v_1 > v_2$, то **скорость их сближения** равна разности скоростей $v_1 - v_2$;
  б) если $v_1 < v_2$, то **скорость их удаления** равна разности скоростей $v_2 - v_1$.

Следует запомнить также ещё несколько полезных формул.

Если начальное расстояние между телами равно S, а скорости тел равны v_1 и v_2, то: а) при движении тел навстречу друг другу время, через которое они встретятся, равно $\frac{S}{v_1 + v_2}$;

б) при движении тел в одну сторону (в случае $v_1 > v_2$) время, через которое первое тело догонит второе, равно $\frac{S}{v_1 - v_2}$.

Если, отправившись одновременно из одной точки, тела движутся в одном направлении по замкнутому пути длиной S со скоростями v_1 и v_2, то время, через которое одно тело снова поравняется с другим (догонит другое), находится по формуле $t = \frac{S}{v_1 - v_2}$ (при $v_1 > v_2$).

Если расстояние между телами равно S_0, а скорости тел равны v_1 и v_2, то, отправившись одновременно в противоположных направлениях (не навстречу друг другу), тела через время t будут находиться на расстоянии $S = S_0 + (v_1 + v_2) \cdot t$.

2.9. Решение текстовых задач. Задачи на проценты

При решении задач на проценты находят следующее

1 Процент от числа.

Чтобы найти ***p% от числа A***, нужно число A умножить на p и разделить на 100.

$$\boxed{\frac{A \cdot p\%}{100\%}}$$

В частности, 50% от числа A — это половина числа A, так как $\frac{A \cdot 50}{100} = \frac{A}{2}$; 25% от числа A — это его четверть; 1% от числа A — это одна сотая часть числа A, то есть $\frac{A}{100}$.

Примеры: 1) 25% от числа 80 равно 20, так как $\frac{80 \cdot 25}{100} = 20$;
2) подоходный налог в 13% на доход в размере 50 000 руб. составляет $\frac{50\,000 \cdot 13}{100} = 6500$ руб.

2 Число по заданному значению его процента.

Чтобы найти ***число, q% которого равно B***, нужно B разделить на q и умножить на 100.

$$\boxed{\frac{B \cdot 100\%}{q\%}}$$

В частности, если 50% от некоторого числа равно B, то это число в два раза больше B, так как $\frac{B\cdot 100}{50}=2B$; если 25% от некоторого числа равно B, то это число в четыре раза больше B.

Примеры: 1) если 25% от некоторого числа равно 20, то это число равно $\frac{20\cdot 100}{25}=80$;
2) если подоходный налог в 13% на доход составляет 6500 руб., то доход равен $\frac{6500\cdot 100}{13}=50\,000$ руб.

3 Процентное отношение двух чисел.
Чтобы найти, ***сколько процентов составляет число A от числа B***, надо отношение $\frac{A}{B}$ этих чисел умножить на 100%.

$$\boxed{\frac{A}{B}\cdot 100\%}$$

Примеры: 1) число 20 составляет 25% от числа 80, так как $\frac{20}{80}\cdot 100\%=25\%$;
2) 6500 руб. составляет 13% от 50 000 руб.;
3) если в 200 г раствора соли в воде содержится 50 г соли, то процентное содержание соли в растворе составляет $\frac{50}{200}\cdot 100\%=25\%$.

4 Число, изменённое на некоторое число процентов.
Если ***число A увеличить на $p\%$***, так что добавка составит $\frac{A\cdot p\%}{100\%}$, то после увеличения получим число, равное

$$\boxed{A+\frac{A\cdot p\%}{100\%}} \text{ или } \boxed{A\cdot\left(1+\frac{p\%}{100\%}\right)}.$$

Уменьшение числа A на $p\%$ приводит к новой величине:

$$\boxed{A\cdot\left(1-\frac{p\%}{100\%}\right)}.$$

Пример. Если цену товара в 300 руб. повысили на 20%, то цена товара стала $300\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)=300\cdot1{,}2=360$ руб.

Если происходит изменение числа A сначала на $p\%$, а затем на $q\%$, то всякий раз вычисление процентов происходит от числа, полученного после предыдущего изменения.

Пример. Если цену товара в 300 руб. сначала повысили на 20%, а затем понизили на 20%, то после повышения цена товара стала 360 руб., а после понижения $360\cdot\left(1-\frac{20}{100}\right)=360\cdot0{,}8=288$ руб.

Примеры решения задач

Задача 1.

Решите уравнение $(x-4)^2+(4y-12)^2=0$.

Решение.

Поскольку $(x-4)^2\ge0$ и $(4y-12)^2\ge0$ при всех значениях переменных x и y, то $(x-4)^2+(4y-12)^2\ge0$. Равенство нулю возможно лишь тогда, когда одновременно и $(x-4)^2=0$, и $(4y-12)^2=0$. Получаем: $x-4=0$ и $4y-12=0$. Таким образом, имеем систему двух линейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases}x-4=0,\\4y-12=0.\end{cases}$ Откуда: $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

Ответ: (4; 3).

Задача 2.

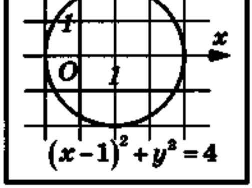
Постройте график уравнения $x^2-2x+y^2-3=0$.

Решение.

Выделим полные квадраты для x и для y:

$x^2-2x+y^2-3=0\Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2-3=0\Leftrightarrow$

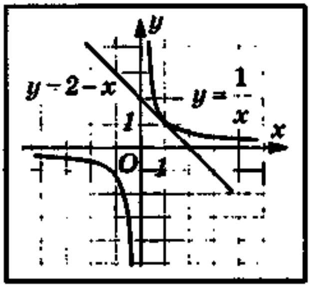
$\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=4.$



Графиком уравнения на координатной плоскости xOy является окружность с центром в точке с координатами (1; 0) и радиусом, равным 2.

Задача 3.

Решите уравнение $\frac{1}{x}=2-x$, используя графики, представленные на рисунке.



Решение.

Графики функций могут быть использованы и при решении рациональных уравнений $p(x)=q(x)$ с одной переменной. Для этого в одной системе координат xOy надо построить графики двух функций: $y=p(x)$ и $y=q(x)$ и найти абсциссы точек пересечения. При этом каждое найденное значение является лишь приближённым значением корня уравнения. Чтобы доказать, что найденное значение действительно является корнем уравнения, надо проверить, что при подстановке его в уравнение оно обращается в верное равенство.

Графики функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=2-x$ имеют одну общую точку, абсцисса которой приблизительно равна 1. Подставляя это значение в исходное уравнение, получим верное числовое равенство $1=1$.

Ответ: 1.

Задача 4.

Решите систему уравнений $\begin{cases} x-2y-2=0, \\ xy=12. \end{cases}$

Решение.

Выразим x из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{cases} x-2y-2=0, \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+2, \\ (2y+2)y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+2, \\ 2y^2+2y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+2, \\ y^2+y-6=0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $y^2+y-6=0$, получаем два значения y: $y=2$ и $y=-3$. Подставляя каждое из этих значений в уравнение $x=2y+2$, получим: если $y=2$, то $x=6$; если $y=-3$, то $x=-4$. Решениями исходной системы служат две пары значений переменных x и y.

Ответ: (6; 2); (−4; 3).

Задача 5.

Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ не имеет решений.

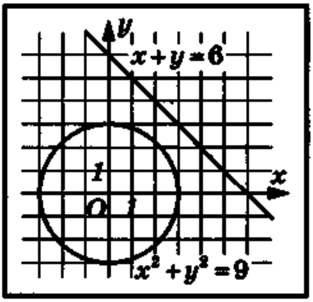
Решение.

Выразим y из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{cases}x+y=6,\\ x^2+y^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-x,\\ x^2+(6-x)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-x,\\ x^2+36-12x+x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-x,\\ 2x^2-12x+27=0.\end{cases}$$

Квадратное уравнение $2x^2-12x+27=0$ не имеет решений, так как дискриминант $D=-72$ отрицателен. Следовательно, и система уравнений не имеет решений.

Решение системы уравнений может быть интерпретировано геометрически как определение координат точек пересечения графиков уравнений системы. Геометрическая интерпретация того факта, что система уравнений $\begin{cases}x+y=6,\\ x^2+y^2=9\end{cases}$ не имеет решений, состоит в том, что прямая, заданная уравнением $x+y=6$, не пересекает окружность, заданную уравнением $x^2+y^2=9$.



Задача 6.

Решите систему уравнений $\begin{cases}x-3xy+2y=5,\\ x+3xy-2y=-3.\end{cases}$

Решение.

Заменим первое уравнение системы суммой первого и второго уравнений:

$$\begin{cases}x-3xy+2y=5,\\ x+3xy-2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3xy+2y+x+3xy-2y=5-3,\\ x+3xy-2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2,\\ x+3xy-2y=-3.\end{cases}$$

Применяя метод подстановки, получим:

$$\begin{cases}x=1,\\ x+3xy-2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ 1+3y-2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=-4.\end{cases}$$

Решением исходной системы служит пара значений $(1;-4)$.

Ответ: $(1;\ -4)$.

Задача 7.

Решите систему уравнений $\begin{cases}xy=3,\\ x^2+y^2=10.\end{cases}$

Решение.

Умножим первое уравнение системы на 2, а затем заменим второе уравнение системы суммой первого и второго уравнений, имея целью получить во втором уравнении полный квадрат:

$$\begin{cases} xy=3, \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=6, \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=6, \\ x^2+y^2+2xy=6+10. \end{cases}$$

Поскольку $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$, получим: $\begin{cases} xy=3, \\ (x+y)^2=16. \end{cases}$

Так как $(x+y)^2=16 \Leftrightarrow (x+y)^2-16=0 \Leftrightarrow (x+y-4)(x+y+4)=0$, то согласно *Правилу* 5 данная система уравнений равносильна совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=3, \\ x+y-4=0, \end{cases} \\ \begin{cases} xy=3, \\ x+y+4=0. \end{cases} \end{array}\right.$ Решая каждую из полученных систем методом подстановки и объединяя полученные решения, получим четыре пары значений.

Ответ: (–3; 1); (–1; –3); (1; 3); (3; 1).

Задача 8.

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{2y}=4, \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{2y}=5. \end{cases}$

Решение.

Введём новые переменные: $a=\dfrac{3}{x}$ и $b=\dfrac{1}{2y}$. Данная система относительно новых переменных a и b принимает вид: $\begin{cases} a+b=4, \\ 2a-b=5. \end{cases}$ Решая систему, например, методом сложения, получим: $a=3$ и $b=1$. Для нахождения значений переменных x и y при $a=3$ и $b=1$ запишем систему: $\begin{cases} \dfrac{3}{x}=3, \\ \dfrac{1}{2y}=1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x=1, \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$.

Задача 9.

Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+2)^2+(2y-1)^2=10,\\(x+2)(2y-1)=3.\end{cases}$

Решение.

Введём новые переменные: $a=x+2$ и $b=2y-1$. Данная система относительно новых переменных a и b принимает вид: $\begin{cases}a^2+b^2=10,\\ab=3.\end{cases}$

Решениями этой системы являются четыре пары значений переменных a и b: $(-3;\ -1)$; $(-1;\ -3)$; $(1;\ 3)$; $(3;\ 1)$. Для нахождения значений переменных x и y воспользуемся уравнениями $x+2=a$ и $2y-1=b$. При $a=-3$ и $b=-1$ получим систему: $\begin{cases}x+2=-3,\\2y-1=-1,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x=-5,\\y=0.\end{cases}$ Пара $(-5;\ 0)$ — первое решение исходной системы уравнений. Аналогично находим ещё три решения: $(-3;\ -1)$; $(-1;\ 2)$; $(1;\ 1)$.

Ответ: $(-5;\ 0)$; $(-3;\ -1)$; $(-1;\ 2)$; $(1;\ 1)$.

Задача 10.

Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+3xy+y^2=61,\\xy=12.\end{cases}$

Решение.

Даная система уравнений является симметрической, поэтому введём новые переменные по формулам: $u=x+y$, $v=x\cdot y$. Система принимает вид: $\begin{cases}u^2+v=61,\\v=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=49,\\v=12\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=-7,\\v=12,\end{cases}\\\begin{cases}u=7,\\v=12.\end{cases}\end{array}\right.$ Возвращаясь к исходным переменным, получим: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-7,\\xy=12,\end{cases}\\\begin{cases}x+y=7,\\xy=12.\end{cases}\end{array}\right.$

Решая каждую из систем методом подстановки и объединяя решения, получим все решения исходной системы: $(-4;\ -3)$; $(-3;\ -4)$; $(3;\ 4)$; $(4;\ 3)$.

Ответ: $(-4;\ -3)$; $(-3;\ -4)$; $(3;\ 4)$; $(4;\ 3)$.

Глава 2

Задача 11.

Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=5,\\ xy(x+y)=30.\end{cases}$

Решение.

Поскольку $\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{6\cdot(y+x)}{xy}$, то относительно новых переменных $u=x+y$, $v=x\cdot y$ исходная система принимает вид: $\begin{cases}\dfrac{6u}{v}=5,\\ vu=30.\end{cases}$ Решая полученную систему с учётом $v\neq 0$ $(vu=30)$, получим: $\begin{cases}u=\dfrac{5v}{6},\\ v^2=36.\end{cases}$ Так как $v^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=6,\\ v=-6,\end{array}\right.$ то $\begin{cases}u=\dfrac{5v}{6},\\ v^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=5,\\ v=6,\end{cases}\\ \begin{cases}u=-5,\\ v=-6.\end{cases}\end{array}\right.$

Возвращаясь к исходным переменным по формулам $x+y=u$, $x\cdot y=v$, получим: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-5,\\ xy=-6.\end{cases}\end{array}\right.$

Решая каждую из систем методом подстановки и объединяя решения, получим все решения исходной системы: $(2;\ 3)$; $(3;\ 2)$; $(-6;\ 1)$; $(1;\ -6)$.

Ответ: (2; 3); (3; 2); (−6; 1); (1; −6).

Задача 12.

Используя графический метод решения систем уравнений, укажите номер системы уравнений, которая не имеет решений:

1) $\begin{cases}y=-x^2+1,\\ y=2\end{cases}$

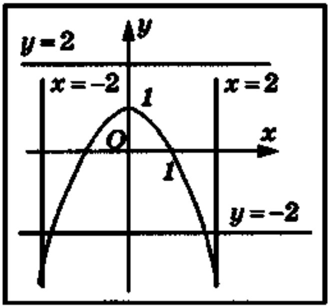
2) $\begin{cases}y=-x^2+1,\\ y=-2\end{cases}$

3) $\begin{cases}y=-x^2+1,\\ x=2\end{cases}$

4) $\begin{cases}y=-x^2+1,\\ x=-2\end{cases}$

Решение.

Первое уравнение каждой системы является уравнением параболы $y=-x^2+1$, второе — уравнением прямой, параллельной одной из осей координат. Построим графики уравнений систем и найдём, графики каких уравнений не пересекаются. Парабола не пересекается только с прямой $y=2$. Поэтому система под номером 1 не имеет решений.



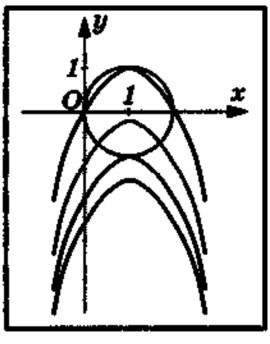
Номер верного ответа: 1.

Задача 13.

Найдите все значения параметра $a \le 0$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ y=-x^2+2x+a\end{cases}$ имеет два решения.

Решение.

Число решений системы уравнений равно числу точек пересечения графиков уравнений этой системы. Графиком первого уравнения на координатной плоскости xOy является окружность с центром в точке с координатами $(1;\,0)$ и радиусом, равным 1. Графиком второго уравнения $y=-x^2+2x+a$ при каждом значении параметра a является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса и ордината вершины параболы равны: $x_в=1$, $y_в=1+a$. Для всех значений параметра абсцисса вершины параболы одна и та же, а ордината меняется в зависимости от значений a. По условию $a \le 0$, следовательно, $y_в \le 1$. Таким образом, график второго уравнения задает семейство парабол, которые в зависимости от значений параметра $a \le 0$ располагаются так, как показано на рисунке. При $a=0$ вершина параболы имеет координаты $(1;\,1)$, и парабола, заданная уравнением $y=-x^2+2x$, пересекает окружность в трёх точках.



При $-2<a<0$ ордината вершины параболы удовлетворяет условию: $-1<y_в<1$, то есть вершина параболы лежит внутри окружности. Следовательно, парабола пересекает окружность в двух точках.

При $a=-2$ вершина параболы имеет координаты $(1;\,-1)$, и парабола, заданная уравнением $y=-x^2+2x-2$, имеет с окружностью одну общую точку.

При $a<-2$ ордината вершины параболы удовлетворяет условию $y_в<-1$, то есть вершина параболы лежит вне окружности, ниже её. Следовательно, парабола не пересекает окружность. Таким образом, исходная система уравнений имеет два решения при $-2<a<0$.

Ответ: $(-2;\ 0)$.

Задача 14.

Две бригады по плану должны были, работая вместе, отремонтировать повреждённый участок шоссе за 18 дней. В действительности сначала работала только первая бригада, а затем — только вторая бригада, производительность труда которой была более высокой, чем у первой бригады. В результате ремонт повреждённого участка шоссе занял 40 дней, причём первая бригада выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько дней одна первая бригада смогла бы отремонтировать повреждённый участок шоссе?

Решение.

1) Пусть A — вся работа по ремонту повреждённого участка шоссе, x — число дней, необходимых одной первой бригаде для выполнения всей работы, а y — число дней, необходимых одной второй бригаде для выполнения всей работы.

2) Производительность первой бригады равна отношению $\frac{A}{x}$, второй бригады — $\frac{A}{y}$. Тогда $\frac{A}{x}+\frac{A}{y}$ — общая производительность первой и второй бригады. Поскольку по плану они должны были, работая вместе, выполнить всю работу за 18 дней, получаем: $\left(\frac{A}{x}+\frac{A}{y}\right)\cdot 18=A \Leftrightarrow \frac{18}{x}+\frac{18}{y}=1$. Первая бригада, работая отдельно с производительностью $\frac{A}{x}$, выполнила $\frac{2}{3}A$ всей работы за $\frac{2}{3}A:\frac{A}{x}=\frac{2x}{3}$ дней. Вторая бригада, работая отдельно с производительностью $\frac{A}{y}$, выполнила оставшуюся $\frac{1}{3}A$ работы за $\frac{1}{3}A:\frac{A}{y}=\frac{y}{3}$ дней. Поскольку весь ремонт был выполнен за 40 дней, получаем уравнение: $\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}=40$.

Таким образом, приходим к системе двух уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} \dfrac{18}{x}+\dfrac{18}{y}=1, \\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{3}=40. \end{cases}$

3) Воспользуемся методом подстановки при решении системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{18}{x}+\dfrac{18}{y}=1, \\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{3}=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{18}{x}+\dfrac{18}{120-2x}=1, \\ y=120-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-69x+1080}{x(120-2x)}=0, \\ y=120-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=45, \\ x=24, \end{array}\right. \\ y=120-2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=45, \\ y=30, \end{cases} \\ \begin{cases} x=24, \\ y=72. \end{cases} \end{array}\right.$$

4) Из условия задачи следует, что поскольку производительность труда второй бригады более высокая, чем у первой бригады, то число дней, необходимых второй бригаде для выполнения всей работы, меньше, чем для первой бригады, то есть $y<x$. Поэтому условию задачи удовлетворяют лишь $x=45$, $y=30$. Итак, одна первая бригада смогла бы отремонтировать повреждённый участок шоссе за 45 дней.

Ответ: 45.

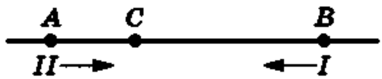
Задача 15.

Из пункта *B* в пункт *A* вышел пешеход. Через 6 часов из пункта *A* в пункт *B* навстречу первому вышел второй пешеход. При встрече выяснилось, что второй пешеход прошёл на 12 км меньше первого. Отдохнув, они одновременно покинули место встречи и продолжили путь, каждый в своем направлении с прежней скоростью. В результате второй пешеход пришёл в пункт *B* через 8 часов, а первый — в пункт *A* через 9 часов после встречи. Найдите расстояние между пунктами *A* и *B*.

Решение.

1) Пусть x км/ч — скорость первого пешехода, а y км/ч – скорость второго пешехода. Обозначим C — место встречи пешеходов, причём по условию AC меньше BC на 12 км.

2) Расстояние CA, которое прошёл первый пешеход после встречи за 9 часов, равно $9x$ км, а расстояние



CB, которое прошёл второй пешеход после встречи за 8 часов, равно $8y$ км. Из условия задачи следует, что $8y-9x=12$. До места встречи первый пешеход прошёл расстояние BC за $\dfrac{8y}{x}$ часов, а второй пешеход до места встречи прошёл расстояние AC за $\frac{9x}{y}$ часов. Так как первый пешеход шёл на 6 часов дольше второго, то $\frac{8y}{x}-\frac{9x}{y}=6$. Приходим к системе двух уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} 8y-9x=12, \\ \frac{8y}{x}-\frac{9x}{y}=6. \end{cases}$

3) Воспользуемся методом введения новой переменной $t=\frac{x}{y}$ во втором уравнении системы: $\frac{8}{t}-9t=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{3}, \\ t=-\frac{4}{3}. \end{array}\right.$ Условию задачи удовлетворяет только положительное значение $t=\frac{2}{3}$.

Приходим к системе $\begin{cases} 8y-9x=12, \\ \frac{x}{y}=\frac{2}{3}, \end{cases}$ решая которую методом подстановки, получим $\begin{cases} x=4, \\ y=6. \end{cases}$

4) Итак, скорости первого и второго пешеходов равны соответственно 4 км/ч и 6 км/ч, а расстояние между пунктами A и B равно $AB=AC+CB=9\cdot4+8\cdot6=84$ (км).

Ответ: 84 км.

Задача 16.

Цена некоторого товара была сначала повышена на 10%, затем ещё на 120 руб., и, наконец, ещё на 5%. Какова была первоначальная цена товара, если в результате повышение составило 31,25% от первоначальной цены?

Решение.

Пусть A рублей — первоначальная цена товара. После первого повышения на 10% цена товара стала равной $A\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)=1{,}1A$ руб., после второго повышения на 120 руб. цена стала равной $(1{,}1A+120)$ руб., и, наконец, после последнего, третьего, повышения на 5% цена стала равной $(1{,}1A+120)\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)=(1{,}1A+120)\cdot1{,}05$ руб.

Повышение первоначальной цены товара A на 31,25% (в результате всех повышений) сделало цену товара равной $A\cdot\left(1+\frac{31{,}25}{100}\right)=1{,}3125A$.

Заполним таблицу:

Начальная цена товара	*Цена товара после повышения на 10%*	*Цена товара после повышения на 120 руб.*	*Цена товара после повышения на 5%*	*Цена товара после повышения на 31,25%*
A	$A\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)=\frac{11}{10}A=1{,}1A$	$(1{,}1A+120)$	$(1{,}1A+120)\cdot1{,}05$	$A\cdot\left(1+\frac{31{,}25}{100}\right)=$ $=1{,}3125A$

Составим уравнение: $(1{,}1A+120)\cdot1{,}05=1{,}3125A$. Решая его, получим:

$(1{,}1A+120)\cdot1{,}05=1{,}3125A\Leftrightarrow1{,}155A+126=1{,}3125A\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow0{,}1575A=126\Leftrightarrow A=800$

Ответ: 800 руб.

Задача 17.

Бронза — это сплав меди и олова. Из бронзы можно изготовить изделие, если в ней содержится 75% меди. Кусок бронзы массой 1000 кг, содержащий 70% меди, сплавили с некоторым количеством меди и получили бронзу, пригодную для изготовления изделия. Определите, сколько килограммов меди было добавлено.

Решение.

Пусть x — число килограммов добавленной меди. По условию задачи составим таблицы.

Бронза	*Медь*	
Исходная масса	Процентное содержание в бронзе	Масса
1000 кг	70%	$1000\cdot\frac{70}{100}=700$ кг

Бронза	*Медь*	
Масса после сплавления	Процентное содержание в бронзе	Масса
$(1000+x)$ кг	75%	$(1000+x)\cdot\frac{75}{100}$ кг

Итак, к 700 кг меди в исходном куске бронзы добавили x кг и при этом получили $(1000+x)\cdot\frac{75}{100}$. Составим уравнение: $700+x=(1000+x)\cdot\frac{75}{100}$. Откуда $x=200$.

Ответ: 200 кг.

Глава 3. Числовые функции

3.1. Функции и способы их задания

Пусть X и Y — некоторые числовые множества, и пусть указан закон f, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$.

Символ $\in$ читается «принадлежит».

! **Число $x \in X$ называют независимой переменной или аргументом, а число $y \in Y$ — зависимой переменной или функцией.**

Аргумент и функцию не обязательно обозначать буквами x и y. Вместо них можно использовать любые другие буквы. Так, зависимость пройденного пути от времени можно представить в виде: $S = f(t)$.

! **— Множество X называют областью определения функции и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.**

— Если для каждого элемента $y \in Y$ найдётся элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$, то множество Y называют областью значений функции и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

Способы задания функции

- **Табличный: все значения аргумента располагаются в одной строке таблицы, а соответствующие им значения функции — в другой, друг под другом.**

Пример.

x	-1	1	3
y	1	4	1

Также примерами могут служить таблицы квадратов и кубов натуральных чисел.

- **Описательный (словесный): зависимость между аргументом и соответствующим значением функции выражается словесным описанием. Используется в тех случаях, когда другие способы невозможны или слишком громоздки.**

Пример. Функция $y=[x]$ задается следующим образом: каждому числу x ставится в соответствие наибольшее из всех целых чисел, которые не превосходят x. Эта функция называется целой частью числа.

- **Аналитический:** функция задается математической формулой.

Пример. $f(x)=x^2, y=2x+2, S=\pi r^2$.

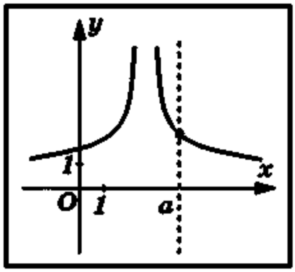
- **Графический:** функция задается в виде графика.

Графический способ задания функции наилучший с точки зрения наглядности.

! Графиком функции $y=f(x)$ на координатной плоскости xOy называется множество точек с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Свойство графика функции.

Прямая, проходящая через любую точку оси Ox, абсцисса которой $a \in D(f)$, и параллельная оси Oy, пересекает график функции, причём в одной точке.



3.2. Область определения функции

! **Областью определения функции** $y=f(x)$ (если она не указана особо) является множество X, для каждого элемента которого выражение $f(x)$ имеет смысл.

Область определения функции обозначается $D(f)$ или $D(y)$.

Области определения некоторых функций

- Областью определения функции $y=f(x)$, где $f(x)$ — многочлен, является всё множество действительных чисел R.

  В частности, $D(y)=R$ для функций:

  а) $y=kx+b$; б) $y=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$; в) $y=x^3$.

Пример. Для функции $y=\frac{x^2+2x-7}{4}$ $D(y)=R$, так как её можно преобразовать: $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$.

- Областью определения функции $y=|x|$ является множество всех действительных чисел R.
- Областью определения функций $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[5]{x}$ и вообще $y=\sqrt[2n+1]{x}$ (где степень корня $2n+1$ — нечётное число) является всё множество действительных чисел R.

Пример. Для функции $y=\sqrt[3]{1-x^2}$ $D(y)=R$.

- Областью определения функций $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$ и вообще $y=\sqrt[2n]{x}$ (где степень корня $2n$ — чётное число) является множество всех действительных неотрицательных чисел: $[0;\ +\infty)$.

  Область определения функции $y=\sqrt{f(x)}$ задаётся неравенством $f(x)\geq 0$.

Пример. Область определения функции $y=\sqrt{x-7}$ находится из условия $x-7\geq 0$. Отсюда $D(y)=[7;\ +\infty)$.

- Областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ является множество всех действительных чисел, кроме нуля: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

  Чтобы найти область определения функции $y=\frac{k}{f(x)}$, надо из области определения функции $y=f(x)$ исключить те значения x, при которых знаменатель дроби обращается в ноль: $f(x)=0$.

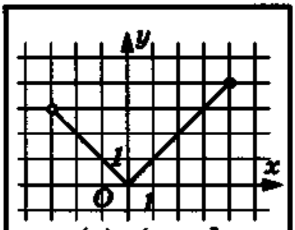
Пример. Для функции $y=\frac{3}{x-2}$ $D(y)=(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

- Область определения функции $y=\dfrac{k}{\sqrt{f(x)}}$ задаётся неравенством $f(x)>0$.

  Область определения функции, составленной из нескольких функций, задаётся системой неравенств для нахождения области определения каждой из этих функций.

> *Пример.* Область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ находится из системы $\begin{cases} x\geq 0, \\ x\neq 2. \end{cases}$
> Отсюда $D(y)=[0;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

Область определения функции может быть задана графически.



$D(y)=(-3;\ 4]$

3.3. Область значений функции

Областью (множеством) значений функции $y=f(x)$ называется множество Y, для каждого элемента y которого найдётся хотя бы одно значение аргумента x такое, что $f(x)=y$.

Область значений функции $y=f(x)$ обозначается $E(y)$ или $E(f)$.

Области значений некоторых функций

- Область значений линейной функции $y=kx+b$ есть множество всех действительных чисел R, если $k\neq 0$, и множество, состоящее из одного значения b, если $k=0$.

> *Пример.* Область значений функции $y=3$ состоит из единственного числа 3.

- Область значений квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ определяется ординатой $y_в$ вершины параболы и направлением её ветвей:

  — если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх, и $E(y)=[y_в;+\infty)$;

  — если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз, и $E(y)=[-\infty;\ y_в)$.

Чтобы найти значение $y_в$, надо найти значение абсциссы вершины параболы по формуле $x_в = -\frac{b}{2a}$, а затем значение квадратичной функции в этой точке: $y(x_в) = a(x_в)^2 + bx_в + c$.

Примеры:

1) область значений функции $y = 2x^2 - 12x + 5$ есть промежуток $E(y) = [-13; +\infty)$, так как $a = 2 > 0$, $x_в = -\frac{-12}{2\cdot 2} = 3$, $y(x_в) = 2\cdot 3^2 - 12\cdot 3 + 5 = -13$;

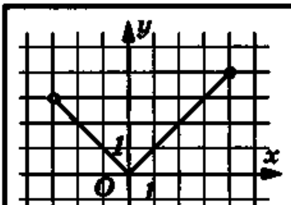
2) для функции $y = -x^2 + x + 1$ $E(y) = (-\infty; 1{,}25]$.

- **Область значений функции $y = \frac{k}{x}$, а также функции вида $y = \frac{k}{ax+b}$, $k \neq 0$, есть множество всех действительных чисел, кроме числа 0, то есть объединение двух промежутков: $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.**

Пример. Область значений функции $y = \frac{3}{5x-4}$ есть объединение двух промежутков: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

- **Область значений функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[2n]{x}$ (где степень корня $2n$ — чётное число), а также $y = |x|$ есть множество неотрицательных чисел: $E(y) = [0;\ +\infty)$.**
- **Область значений функций $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[2n+1]{x}$ (где степень корня $2n + 1$ — нечётное число), а также $y = x^3$ есть множество всех действительных чисел R.**

Область значений функции, заданной графически, можно определить как множество точек оси ординат, обладающих тем свойством, что прямая, параллельная оси Ox и проходящая через данную точку, пересекает график хотя бы в одной точке.



$E(y) = [0; 4]$

Обратите внимание на различия в утверждении об области значений функции, заданной графически, и свойстве графика функции.

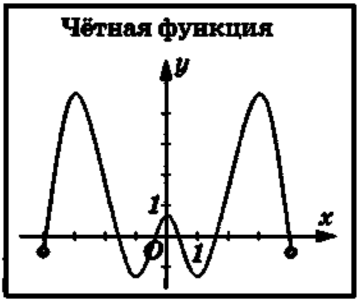
3.4. Чётные и нечётные функции

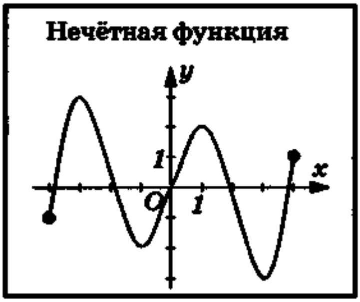
> **!** Функция $y=f(x)$ называется **чётной**, если для любого значения аргумента $x \in D(y)$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

> **!** Функция $y=f(x)$ называется **нечётной**, если для любого значения аргумента $x \in D(y)$ выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат.





Если значение $x=0$ принадлежит области определения нечётной функции, то $f(0)=0$, то есть график функции проходит через начало координат.

Область определения любой чётной или нечётной функции симметрична относительно начала координат.

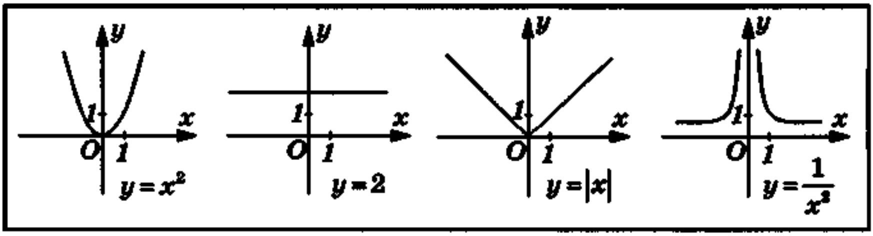
Пример. Симметричны относительно начала координат: 1) вся числовая прямая; 2) интервал $(-a; a)$; 3) объединение промежутков $(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$.

Если область определения некоторой функции не симметрична относительно начала координат, то такая функция не может быть ни чётной, ни нечётной.

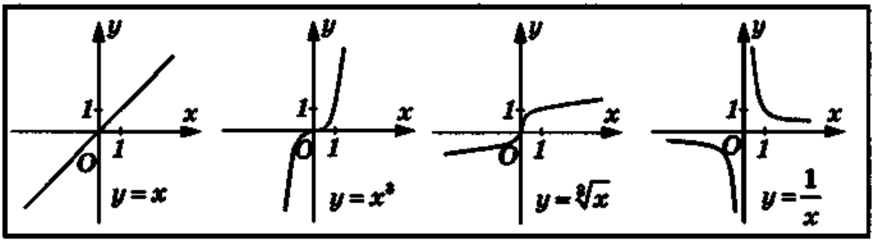
Пример. Функция $y=\sqrt{x}$ не является ни чётной, ни нечётной, так как область её определения $[0; +\infty)$ не симметрична относительно начала координат.

Единственная функция, которая одновременно чётна и нечётна, — это функция $y=0$.

Примеры чётных функций:



Примеры нечётных функций:



Любую функцию $y=f(x)$, заданную на симметричном относительно начала координат множестве, можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций: $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

3.5. Ограниченность функции

! Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной снизу**, если существует такое число A, что для любого $x\in D(y)$ выполнено неравенство $f(x)\geq A$.

Пример. Функция $y=x^2$ является ограниченной снизу ($A=0$), так как квадрат любого числа неотрицателен.

! Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной сверху**, если существует такое число B, что для любого $x\in D(y)$ выполнено неравенство $f(x)\leq B$.

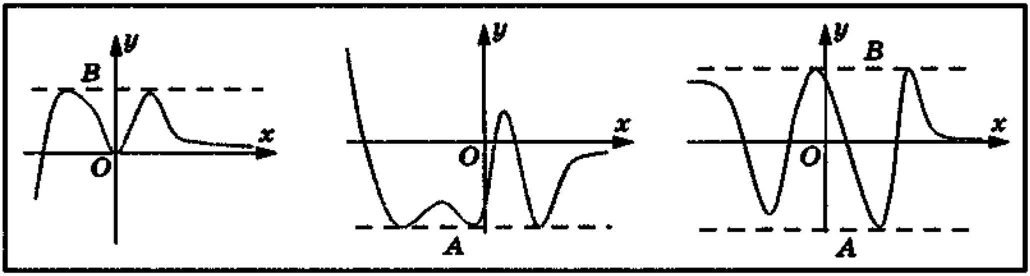
Пример. Функция $y=-x^2+3x-2$ является ограниченной сверху ($B=0{,}25$), так как область её значений $E(y)=(-\infty;\ 0{,}25]$.

! Функция $y=f(x)$ называется **ограниченной**, если она ограничена и снизу, и сверху.

Пример. Функция $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ ограничена, так как область её значений $E(y)=(0;\ 1]$.

Геометрически ограниченность функции $y=f(x)$ сверху (снизу) означает, что график данной функции находится не выше (не ниже) некоторой горизонтальной прямой.

Ограниченность функции означает, что её график находится внутри горизонтальной полосы.



Исследовать функцию на ограниченность означает определить, является ли она ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной или не является ограниченной ни сверху, ни снизу.

Вопрос об ограниченности или неограниченности функции непосредственно связан с нахождением области её значений.

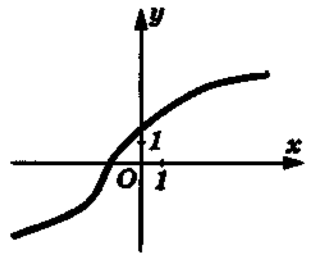
- Если область значений функции принадлежит лучу $[A;\ +\infty)$, то она ограничена снизу.
- Если область значений функции принадлежит лучу $(-\infty;\ B]$, то она ограничена сверху.
- Если область значений функции принадлежит отрезку $[A;\ B]$, то функция ограничена.

Примеры: 1) квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ является ограниченной снизу, если $a>0$, и ограниченной сверху, если $a<0$; 2) функции $y=|x|$ и $y=\sqrt{x}$ являются ограниченными снизу; 3) линейная функция $y=kx+b$, $k\neq 0$, функция $y=\dfrac{k}{x}$, $k\neq 0$ и функции $y=x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$ не являются ограниченными ни сверху, ни снизу.

3.6. Возрастание и убывание функции

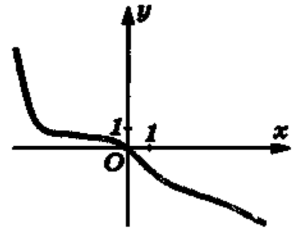
! Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей на промежутке**, если для любых двух значений x_1, x_2 из этого промежутка таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. Иными словами, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Возрастающая функция



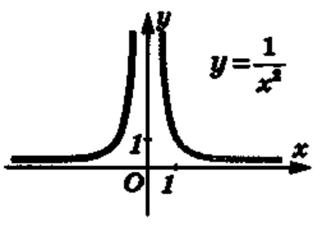
! Функция называется **убывающей на промежутке**, если для любых двух значений x_1, x_2 из этого промежутка таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$. Иными словами, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Убывающая функция



Функция $y=f(x)$ может возрастать на одних промежутках своей области определения $D(y)$ и убывать на других.

Пример. Областью определения функции $y=\dfrac{1}{x^2}$ является множество всех действительных чисел, кроме нуля: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. При этом на промежутке $(-\infty;\ 0)$ функция возрастает, а на промежутке $(0;\ +\infty)$ функция убывает.

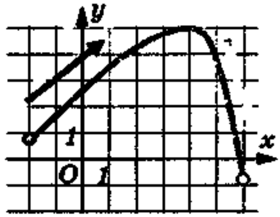


Термины «возрастающая функция» и «убывающая функция» объединяют общим названием «монотонная функция». При этом определение промежутков возрастания и убывания функции называют **исследованием функции на монотонность**.

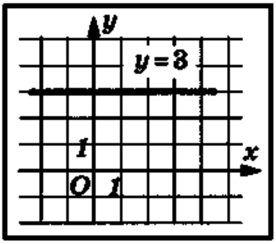
Промежутки монотонности функции, заданной графически, можно определить по графику.

- Если, двигаясь по графику функции слева направо на некотором промежутке, мы будто бы поднимаемся в горку, то на этом промежутке функция возрастает.
- Если, двигаясь по графику функции слева направо на некотором промежутке, мы будто бы спускаемся с горки, то на этом промежутке функция убывает.

Пример. Областью определения функции, график которой изображён на рисунке, является промежуток $[-2; 6)$. При этом на промежутке $[-2; 4]$ функция возрастает, а на промежутке $[4; 6)$ функция убывает.



Постоянная функция $y=b$, где b — произвольное число, не является ни возрастающей, ни убывающей.



Пример. Функция $y=3$ не является ни возрастающей, ни убывающей, что видно из её графика.

3.7. Промежутки сохранения знака функции. Наибольшее и наименьшее значения

Для нахождения всех значений аргумента x, при которых функция $y=f(x)$ принимает положительные (отрицательные) значения, необходимо решить неравенство $f(x)>0$ ($f(x)<0$). Говорят, что при этих значениях x функция сохраняет знак.

Примеры: 1) функция $y=3x+9$ положительна при тех значениях x, которые удовлетворяют неравенству $3x+9>0$;
2) функция $y=-x^2+9$ отрицательна при тех значениях x, которые удовлетворяют неравенству $-x^2+9<0$.

! **Значения x, при которых $f(x)=0$, называют нулями функции $y=f(x)$.**

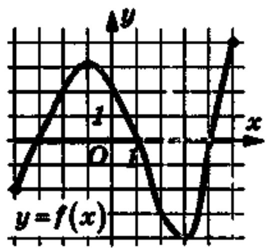
Пример. Нули функции $y=\frac{1}{x^2}-1$ являются корнями уравнения $\frac{1}{x^2}-1=0$.

Промежутки, на которых функция, заданная графически, сохраняет знак, можно определить по графику.

- Если на некотором промежутке график функции расположен выше оси Ox, то на этом промежутке функция принимает положительные значения (то есть положительна).
- Если на некотором промежутке график функции расположен ниже оси Ox, то на этом промежутке функция принимает отрицательные значения (то есть отрицательна).

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox являются нулями функции.

Пример. Областью определения функции $y=f(x)$, график которой изображён на рисунке, является промежуток $[-4;\ 5]$. Функция положительна на промежутках $(-3;\ 1)$ и $(4;\ 5]$ и отрицательна на промежутках $[-4;\ -3)$ и $(1;\ 4)$.
Отметим, что точки $x=-3$, $x=1$ и $x=4$ являются нулями функции и не содержатся в промежутках, на которых функция сохраняет знак.



! **Число M называется наибольшим значением функции $y=f(x)$ на промежутке, если:**
1) существует число x_0 из указанного промежутка такое, что $f(x_0)=M$;

2) для любого значения x из этого промежутка верно неравенство $f(x) \le M$.

Пример. Для функции $y = f(x)$, график которой изображён на рисунке выше, наибольшее значение на промежутке $[-4; 5]$ равно 4, а наименьшее равно -4.

Число m называется **наименьшим значением функции $y = f(x)$ на промежутке**, если:

1) существует число x_0 из указанного промежутка такое, что $f(x_0) = m$;

2) для любого значения x из этого промежутка верно неравенство $f(x) \ge m$.

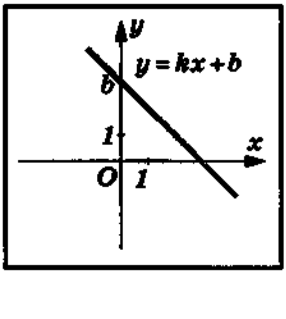
Если функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, то своё наибольшее значение она принимает на его правом конце: $M = f(b)$, а наименьшее — на левом конце: $m = f(a)$.

Для функции $y = f(x)$, убывающей на отрезке $[a; b]$, наоборот: $M = f(a)$, $m = f(b)$.

3.8. Линейная функция

При решении задач часто встречается зависимость одной величины от другой, которую можно выразить с помощью линейной функции.

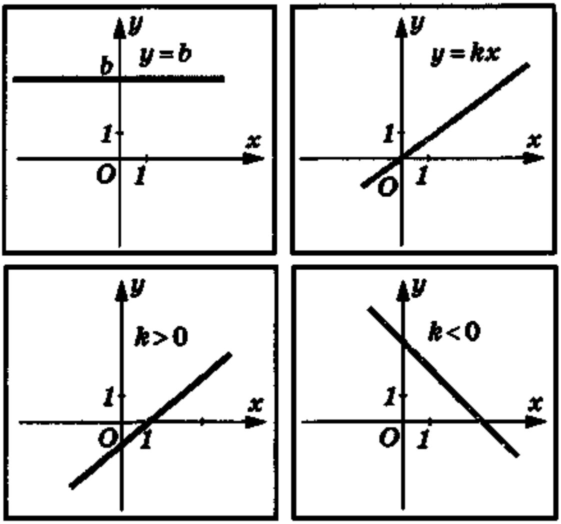
Функция вида $y = kx + b$, где k и b — заданные числа, называется **линейной функцией**.



Область определения линейной функции — всё множество действительных чисел: $D(y) = R$.

Область значений — множество всех действительных чисел R, если $k \ne 0$, и множество, состоящее из одного значения b, если $k = 0$.

Графиком линейной функции $y = kx + b$ является **прямая**. Число k называют угловым коэффициентом прямой, а уравнение $y = kx + b$ — уравнением этой прямой.



Частными случаями линейных функций являются:

— постоянная функция $y=b$ $(k=0)$;

— функция $y=kx$ $(b=0)$, называемая прямой пропорциональностью.

График постоянной функции — прямая, параллельная оси Ox. График функции $y=kx$ — прямая, проходящая через начало координат.

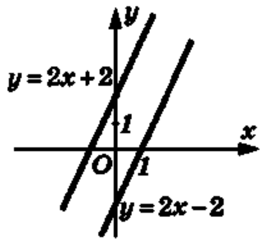
Функция $y=kx$ нечётная.

Если $k>0$, то функция $y=kx+b$ возрастающая.

Если $k<0$, то функция $y=kx+b$ убывающая.

Графики линейных функций $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны, если угловые коэффициенты k_1 и k_2 равны: $k_1=k_2$.

Пример. Графики функций $y=2x+2$ и $y=2x-2$ параллельны, поскольку $k_1=k_2=2$.



Для нахождения значений k и b в формуле линейной функции $y=kx+b$, график которой проходит через две данные точки, необходимо подставить координаты каждой из этих точек в уравнение $y=kx+b$ и решить полученную систему уравнений относительно переменных k и b.

Пример. Если график линейной функции проходит через точки $(1;\ 2)$ и $(4;\ -1)$, то для нахождения чисел k и b необходимо решить систему уравнений: $\begin{cases} k\cdot 1+b=2, \\ k\cdot 4+b=-1. \end{cases}$

Прямая, заданная уравнением $y=kx+b$, всегда проходит через точку с координатами $(0;\ b)$.

3.9. Квадратичная функция

Функция вида $y=ax^2+bx+c$, $a\neq0$ называется квадратичной функцией (при $a\neq0$ выражение ax^2+bx+c является квадратным трёхчленом).

Область определения квадратичной функции: $D(y)=R$.

График квадратичной функции — парабола.

Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх, при этом $E(y)=[y_в;\ +\infty)$.

Если $a<0$, то ветви направлены вниз, при этом $E(y)=(-\infty;\ y_в]$.

Координаты вершины параболы определяются по формулам:

$$\boxed{x_в=-\frac{b}{2a},\quad y_в=a(x_в)^2+bx_в+c}$$

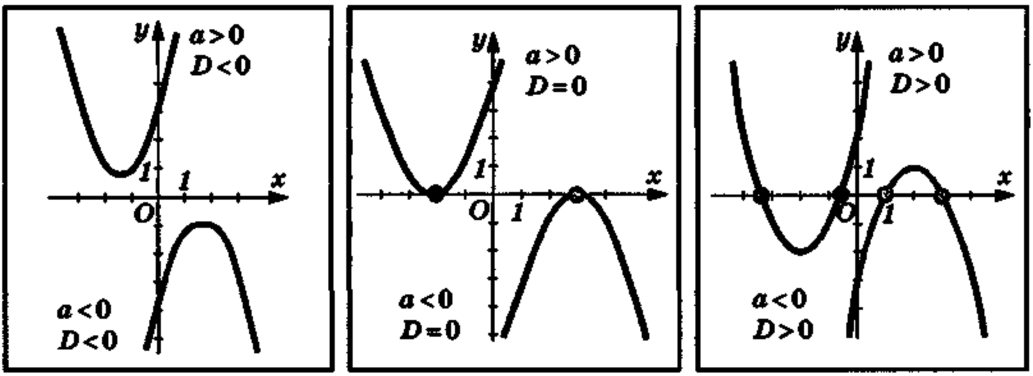
Значение c есть ордината точки пересечения параболы с осью ординат: $c=y(0)$.

Расположение графика квадратичной функции относительно оси абсцисс определяется знаком дискриминанта: $D=b^2-4ac$.

Если $D<0$, то парабола не имеет с осью Ox общих точек.

Если $D=0$, то парабола имеет с осью Ox одну общую точку (касается оси Ox).

Если $D>0$, то парабола пересекает ось Ox в двух точках.



Пример. Для квадратного трёхчлена x^2-2x+5 дискриминант $D=4-20=-16<0$. Поэтому график квадратичной функции $y=x^2-2x+5$ не имеет с осью Ox общих точек.

Нулями квадратичной функции ax^2+bx+c, $a\neq 0$ являются корни квадратного трёхчлена, то есть корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Вычисление корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$		
$D<0$	$D=0$	$D>0$
Корней нет	$x_1=-\dfrac{b}{2a}$	$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$
Разложение квадратного трёхчлена на множители		
На множители не раскладывается	$ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	$ax^2+bx+c=$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$

Если второй коэффициент квадратного уравнения — чётное число: $ax^2+2px+c=0$, $a\neq0$, то удобнее вычислять $D_1=\dfrac{D}{4}=p^2-ac$. И если $D_1\geq 0$, то корни вычисляются по формулам: $x_1=\dfrac{-p-\sqrt{D_1}}{a}$, $x_2=\dfrac{-p+\sqrt{D_1}}{a}$.

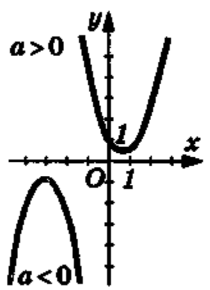
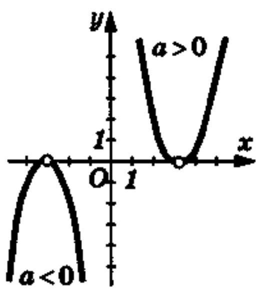
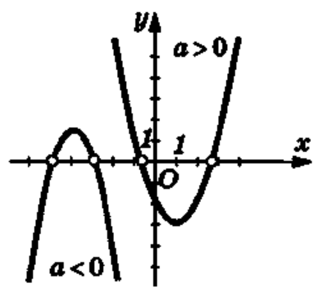
Пример. Для уравнения $x^2-6x+5=0$ $D_1=(-3)^2-1\cdot5=4$, $x_1=\dfrac{3-\sqrt{4}}{1}=1$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{4}}{1}=5$.

3.10. Свойства квадратичной функции

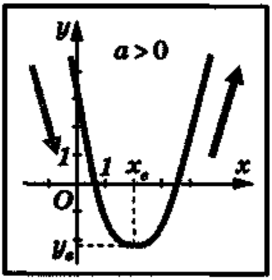
Для нахождения промежутков, на которых квадратичная функция принимает положительные значения, необходимо решить неравенство $ax^2+bx+c>0$, а отрицательные значения — неравенство $ax^2+bx+c<0$.

Пример. Функция $y=-3x^2+5x+2$ принимает отрицательные значения для всех значений x, для которых $-3x^2+5x+2<0$ или $3x^2-5x-2>0$.

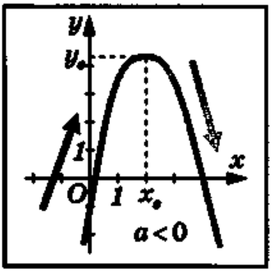
Промежутки сохранения знака квадратичной функции указаны в таблице.

	$D<0$	$D=0$	$D>0$
Промежутки сохранения знака при $a>0$			
$y>0$	$x\in(-\infty;\ +\infty)$	$x\in\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{2a};\ +\infty\right)$	$x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$
$y<0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x\in(x_1;\ x_2)$
Промежутки сохранения знака при $a<0$			
$y>0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x\in(x_1;\ x_2)$
$y<0$	$x\in(-\infty;\ +\infty)$	$x\in\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{2a};\ +\infty\right)$	$x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$
			

При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, и квадратичная функция возрастает на промежутке справа от вершины параболы: $[x_в;\ +\infty)$, а убывает слева от вершины параболы: $(-\infty;\ x_в]$. При этом функция принимает в точке $x_в=-\dfrac{b}{2a}$ своё **наименьшее значение**, равное $y_в=a(x_в)^2+bx_в+c$.

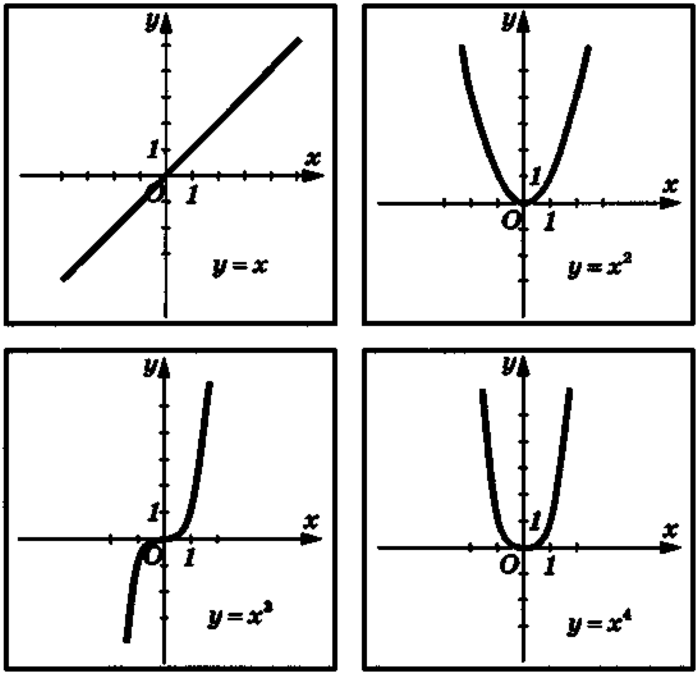


При $a<0$, наоборот, квадратичная функция **возрастает** на промежутке слева от вершины параболы: $(-\infty;\ x_в]$, а **убывает** справа от вершины параболы: $[x_в;\ +\infty)$. При $a<0$ в той же точке — $x_в=-\dfrac{b}{2a}$ квадратичная функция принимает своё **наибольшее значение**, равное $y_в=a(x_в)^2+bx_в+c$.



3.11. Степенные функции $y=x^n$

Функция вида $y=x^n$, где n — натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем.

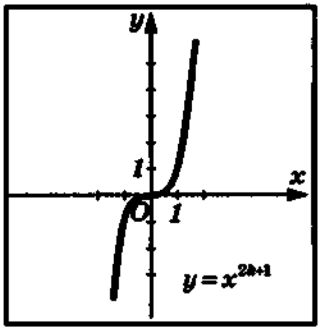


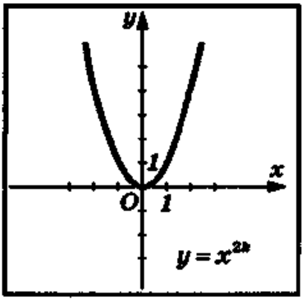
Графики всех функций вида $y=x^n$, $n \geq 2$ называются параболами n-го порядка.

График функции $y=x^2$ называют параболой без указания степени, а график функции $y=x^3$ называют кубической параболой.

Рассмотрим свойства функций $y=x^{2k+1}$.

- Область определения: $D(y)=R$.
- Область значений: $E(y)=R$.
- Нечётные функции.
- Функции возрастают на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$.
- Графики функций имеют центр симметрии — точку $O(0;\ 0)$.





Рассмотрим свойства функций $y = x^{2k}$.

- Область определения: $D(y) = R$.
- Область значений: $E(y) = [0; +\infty)$.
- Чётные функции.
- Функции $y = x^{2k}$ убывают на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастают на промежутке $[0; +\infty)$.
- Графики функций имеют ось симметрии — ось координат.

Графики всех степенных функций проходят через две точки: $O(0; 0)$ и $A(1; 1)$

Знание свойств степенных функций позволяет вывести правила, которыми часто пользуются при сравнении степеней неотрицательных чисел.

Из возрастания любой степенной функции с натуральным показателем $y = x^n$ на промежутке $[0; +\infty)$ следует, что два произвольных неотрицательных числа a и b соотносятся между собой так же, как и любые их натуральные степени.

Для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ если $a > b$, то $a^n > b^n$.

Верно и обратное. Для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ если $a^n > b^n$, то $a > b$.

Пример. Поскольку $15{,}2 > 7{,}8$, то $15{,}2^3 > 7{,}8^3$.

3.12. Функции $y = \frac{k}{x}$ и $y = x^{-n}$

! Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, задаёт обратную пропорциональную зависимость между x и y.

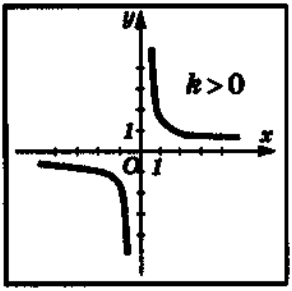
Функцию $y = \frac{k}{x}$ рассматривают и при $k < 0$.

Примеры: 1) при фиксированной длине пути S время t обратно пропорционально скорости v: $t = \frac{S}{v}$;

2) при заданном объёме работы A время t её выполнения обратно пропорционально производительности p: $t = \frac{A}{p}$.

Область определения: $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

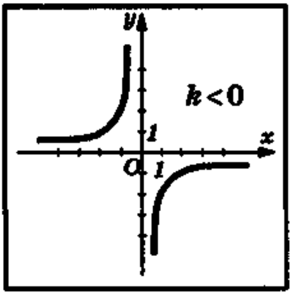
Область значений: $E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$



Графиком функции $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$ является гипербола.

При $k>0$ ветви гиперболы расположены в первой и третьей четвертях координатной плоскости, а при $k<0$ — во второй и четвёртой четвертях.

Ветви гиперболы неограниченно приближаются к осям координат, но не пересекают их (оси координат называют асимптотами).



Функция $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$ нечётная, гипербола симметрична относительно начала координат.

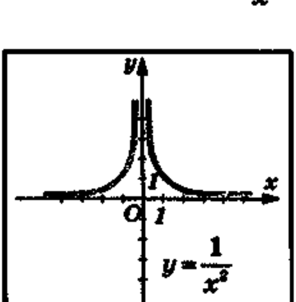
При $k>0$ функция $y=\frac{k}{x}$ убывает на двух промежутках: $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

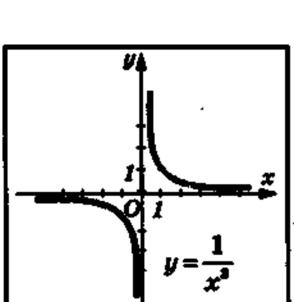
При $k<0$ функция $y=\frac{k}{x}$ возрастает на двух промежутках: $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

! **Функцию вида $y=x^{-n}$, где n — натуральное число, называют степенной функцией с отрицательным целым показателем.**

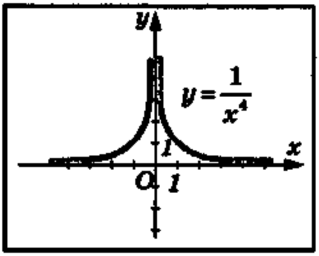
По определению степени с целым показателем при $x\neq 0$: $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$.

Графики функций вида $y=x^{-n}$ или $y=\frac{1}{x^n}$ называют гиперболами n-го порядка.





Графики этих функций можно использовать при решении довольно сложных уравнений. По графику каждой функции определяются промежутки её возрастания и убывания, а также промежутки, на которых функция принимает положительные и отрицательные значения.



3.13. Функции $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt[3]{x}$

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a (обозначают $\sqrt{a}$).

При $a\geq 0$ $x=\sqrt{a}$, если $x\geq 0$ и $x^2=a$.

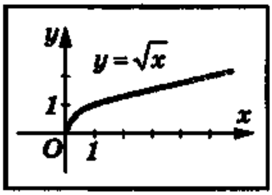
Примеры: 1) $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{0}=0$; 2) $\sqrt{-9}$ не существует; 3) число -3 не является арифметическим квадратным корнем из числа 9.

Рассмотрим свойства функции $y=\sqrt{x}$.

Область определения: $D(y)=[0;+\infty)$.

Область значений: $E(y)=[0;+\infty)$.

Функция $y=\sqrt{x}$ возрастает на всей области определения и принимает своё наименьшее значение $y=0$ при $x=0$.

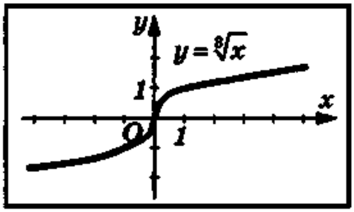


Функция $y=\sqrt{x}$ принимает неотрицательные значения на всей области определения: $\sqrt{x}\geq 0$ для всех $x\geq 0$.

Кубическим корнем, или корнем третьей степени, из произвольного числа a называют такое число, куб которого равен a (обозначают $\sqrt[3]{a}$).

При любом a $x=\sqrt[3]{a}$, если $x^3=a$.

Примеры: 1) $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[3]{1}=1$, $\sqrt[3]{0}=0$; 2) $\sqrt[3]{-8}=-2$, $\sqrt[3]{-1}=-1$; 3) число -3 является кубическим корнем из числа -27.



Рассмотрим свойства функции $y=\sqrt[3]{x}$.

Область определения: $D(y)=(-\infty;\ +\infty)=R$.

Область значений: $E(y)=(-\infty;\ +\infty)=R$.

Функция $y=\sqrt[3]{x}$ нечётная.

Функция $y=\sqrt[3]{x}$ возрастает на всей области определения.

Функция $y=\sqrt[3]{x}$ принимает положительные значения на промежутке $(0;\ +\infty)$ и отрицательные значения на промежутке $(-\infty;\ 0)$. При $x=0$ $y=0$.

Важно помнить, что $\sqrt{a^2}=|a|$; $\sqrt[3]{a^3}=a$.

Кроме корней 2 и 3 степени рассматривают и корень произвольной натуральной степени n.

Корень натуральной степени n из неотрицательного числа a обозначают символом $\sqrt[n]{a}$.

Для любых положительных чисел $a>0$ и $b>0$ выполняются свойства корней.

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$	3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$
2. $\sqrt[n]{a^n}=a$	4. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	6. $\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}$

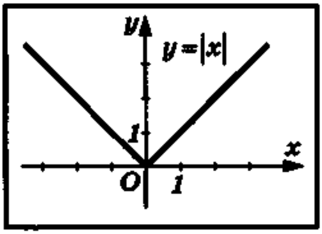
Для корней нечётной степени эти свойства применимы и к отрицательным числам a и b.

3.14. Функция $y=|x|$. Кусочно-заданные функции

! **Функцию $y=|x|$ определяют следующим образом:**

$$y(x)=|x|=\begin{cases}x, & \text{если } x\geq 0;\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Область определения: $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$.

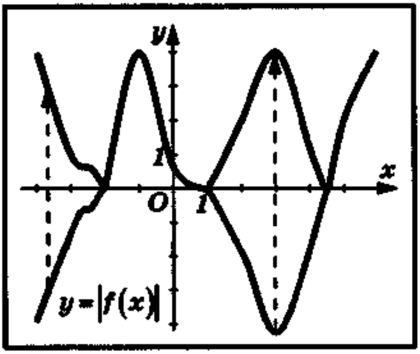


Область значений: $E(y) = [0; +\infty)$.

Функция $y = |x|$ чётная, и её график симметричен относительно оси ординат.

Функция $y = |x|$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Функция $y = |x|$ положительна при всех значениях x, кроме нуля: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.



Для любой функции $y = f(x)$ можно задать функцию $y = |f(x)|$:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \textit{если } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \textit{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо сохранить точки графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси Ox или на ней, а точки графика функции $y = f(x)$, лежащие ниже оси Ox, симметрично отразить относительно этой оси.

! Если функция $y = f(x)$ на разных промежутках области определения задаётся разными формулами, то говорят о кусочно-заданной функции.

Для записи кусочно-заданной функции используют фигурную или квадратную скобку.

Примеры: 1) $f(x) = \left[\begin{array}{ll} x, & \textit{если } x \geq 0; \\ -x, & \textit{если } x < 0; \end{array}\right.$

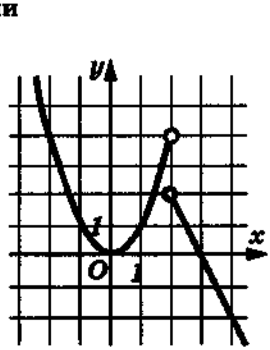
2) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \textit{если } x < 5; \\ -x^2, & \textit{если } x \geq 5. \end{cases}$

Область определения кусочно-заданной функции указывается при задании.

Чтобы построить график кусочно-заданной функции, надо на каждом из заданных промежутков области определения построить часть графика, соответствующую указанной формуле.

Пример. Для построения графика функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\le 2; \\ -2x+6, \text{ если } x>2, \end{cases}$$ следует:



1) построить график функции $y=x^2$ на промежутке $(-\infty;\ 2]$, то есть взять ту часть параболы, для которой $x\le 2$.

2) построить график функции $y=-2x+6$ на промежутке $(2;\ +\infty)$, то есть взять ту часть прямой, для которой $x>2$.

3.15. Преобразования графиков функций

Иногда удобнее не строить график функции по точкам, а получить его из уже известного графика с помощью преобразований. Некоторые из основных видов таких преобразований рассмотрим ниже.

Параллельный перенос

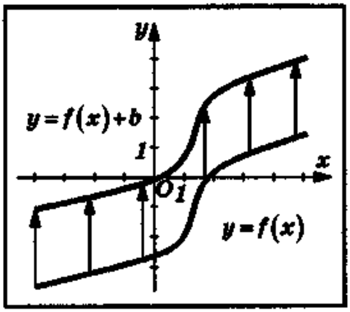


График функции $y=f(x)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси Oy на b единиц. Если $b>0$, то график функции $y=f(x)$ смещается на b единиц вверх, а если $b<0$, то — на b единиц вниз.

Пример. График функции $y=x^2+2$ получается из графика функции $y=x^2$ переносом последнего на 2 единицы вверх, а график функции $y=x^2-3$ получается переносом того же графика на 3 единицы вниз.

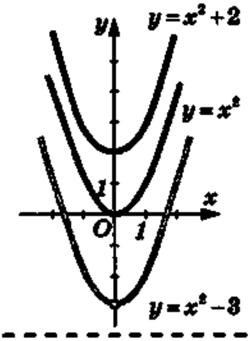
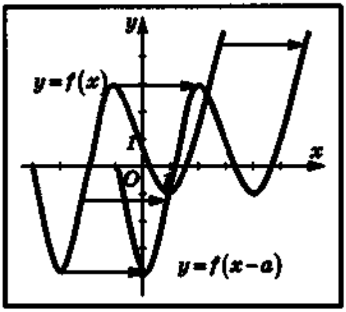


График функции $y=f(x-a)$, где $a>0$, получается из графика функции $y=f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси Ox на a единиц вправо. График функции $y=f(x+a)$, где $a>0$, получается из графика функции $y=f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси Ox на a единиц влево.



Пример. График функции $y=\sqrt{x-2}$ получается переносом графика функции $y=\sqrt{x}$ на 2 единицы вправо.

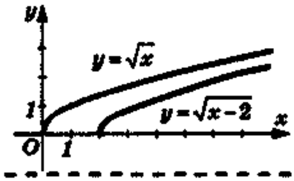
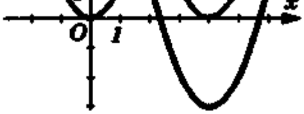


График функции $y=f(x-a)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ последовательными параллельными переносами последнего на a единиц вдоль оси абсцисс и на b единиц вдоль оси ординат.

Пример. Рассмотрим, как получается график квадратного трёхчлена $y=x^2-8x+13$. Выделим полный квадрат: $x^2-8x+13=(x-4)^2-3$. Следовательно, график квадратного трёхчлена $y=x^2-8x+13$ получается переносом графика функции $y=x^2$ на 4 единицы вправо и на 3 единицы вниз.



Растяжение графика вдоль оси ординат

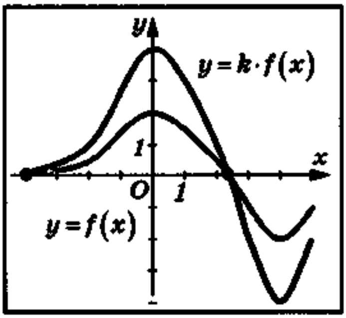


График функции $y=k\cdot f(x)$ есть множество точек координатной плоскости с координатами $(x;\ k\cdot f(x))$. Ордината каждой точки, лежащей на графике функции $y=k\cdot f(x)$, получается умножением на число k ординаты соответствующей точки, лежащей на графике функции $y = f(x)$.

Такое преобразование при $k > 0$ называют растяжением вдоль оси ординат с коэффициентом k. Точки, ординаты которых равны нулю, остаются при этом неподвижными.

Если $k > 1$, то действительно происходит растяжение графика.

Если $0 < k < 1$, то вместо растяжения речь идёт о сжатии в $\frac{1}{k}$ раз.

Симметрия

График функции $y = -f(x)$ — множество точек координатной плоскости с координатами $(x; -f(x))$. Точки с координатами $(x; f(x))$ и $(x; -f(x))$ симметричны относительно оси абсцисс. Таким образом, **график функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.** При симметрии относительно оси абсцисс точки графика, лежащие на ней, остаются неподвижными.

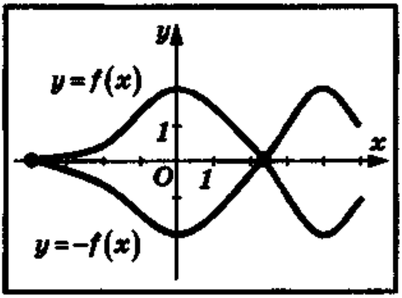
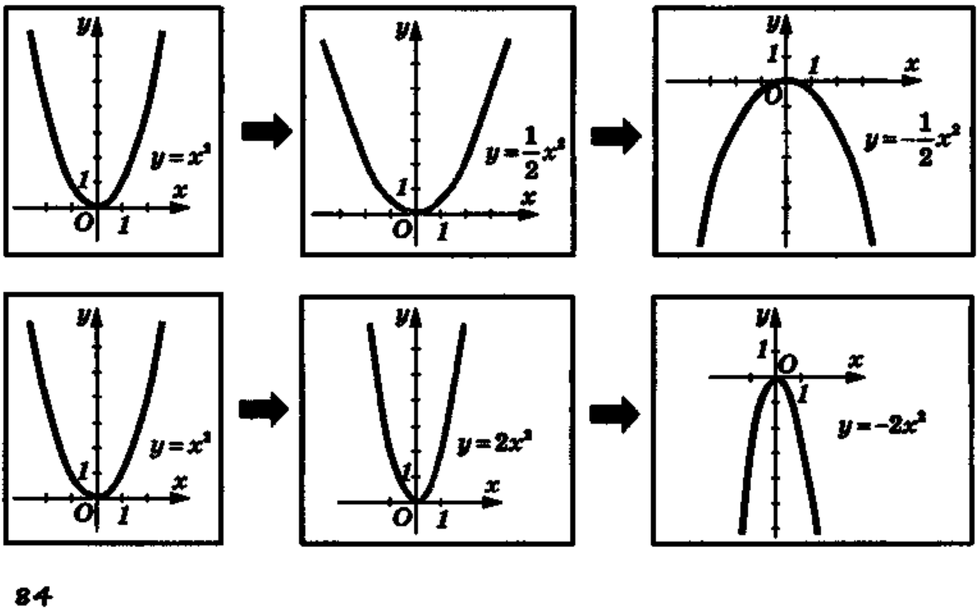


График функции $y = -k \cdot f(x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ последовательным растяжением вдоль оси ординат и симметрией относительно оси абсцисс.



Примеры решения задач

Задача 1.

Дана функция $y=\frac{x}{x^2+1}$. Найдите значения этой функции при $x=0$, $x=1$, $x=-2$.

Решение.

Найти значение функции при заданном значении аргумента — это значит найти число, получающееся при подстановке значения аргумента в формулу, задающую функцию. При $x=0$ получим: $y=\frac{0}{0^2+1}=0$; при $x=1$ $y=\frac{1}{1^2+1}=0{,}5$; при $x=-2$ $y=\frac{-2}{(-2)^2+1}=-0{,}4$.

Ответ: 0; 0,5; −0,4.

Задача 2.

Длина одной из сторон прямоугольника равна k. Выразите формулой зависимость между длиной второй стороны прямоугольника и его площадью.

Решение.

Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон. Обозначим длину второй стороны $x\,(x>0)$, а площадь прямоугольника — S. Получим, что $S=kx$.

Ответ: $S=kx$.

Задача 3.

Функция задана формулой $y=-2x^2+ax+5$. Найдите значение параметра a, если $y\left(\sqrt{5}\right)=0$.

Решение.

Запись $y\left(\sqrt{5}\right)=0$ является краткой формой записи того, что при $x=\sqrt{5}$ значение функции $y=-2x^2+ax+5$ равно 0. Подставляя $x=\sqrt{5}$, получим: $-2\left(\sqrt{5}\right)^2+a\sqrt{5}+5=0$, откуда $a=\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

Задача 4.

Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

Решение.

Область определения функции $y=\sqrt{f(x)}$ задаётся неравенством $f(x)\ge 0$. Получаем: $16-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2\le 16 \Leftrightarrow -4\le x\le 4$.

Ответ: $[-4;\ 4]$.

когда уравнение $f(x)=y$ имеет хотя бы одно решение. Все такие значения y образуют область значений функции $y=f(x)$.

Уравнение $\dfrac{1}{x^2+1}=y$ при $y=0$ не имеет решений, при $y\neq 0$ получим: $x^2+1=\dfrac{1}{y}$ или $x^2=\dfrac{1}{y}-1$. Последнее уравнение имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда его правая часть неотрицательна, то есть $\dfrac{1}{y}-1\geq 0$. Используем правила равносильности: $\dfrac{1}{y}-1\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-y}{y}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{y-1}{y}\leq 0$. Решая неравенство методом интервалов, получим: $0<y\leq 1$.

Ответ: $(0;\ 1]$.

Задача 9.

Какие из указанных ниже функций являются чётными, а какие — нечётными?

1) $y=1+x^2-x^4$ 2) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ 3) $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

Решение.

Для произвольного значения x из области определения каждой функции вычислим значение $y(-x)$ и сравним его со значением $y(x)$.

1) $y=1+x^2-x^4$, $y(-x)=1+(-x)^2-(-x)^4=1+x^2-x^4$. Так как $y(-x)=y(x)$, то функция $y=1+x^2-x^4$ чётная.

2) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$, $y(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}$. Так как $y(-x)=-y(x)$, то функция $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ нечётная.

3) $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$, $y(-x)=\dfrac{-x+1}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x+1}{x^2-1}$. Так как, например, для $x=2$ $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то функция $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ не является ни чётной, ни нечётной.

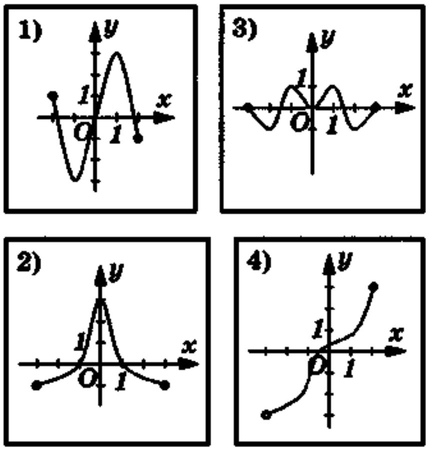
Ответ: 1) чётная; 2) нечётная; 3) ни чётная, ни нечётная.

Задача 10.

На рисунке приведены графики некоторых функций. Какие из них являются чётными, а какие — нечётными?

Решение.

Сначала установим, симметрична ли область определения функции относительно начала координат. Если она не симметрична,



то функция не может быть ни чётной, ни нечётной. Если же она симметрична, то определим, симметричен ли график функции относительно оси ординат или начала координат. В первом случае функция чётная, во втором нечётная.

Для функции 1) и область определения $[-2; 2]$, и график функции симметричны относительно начала координат. Функция 1) нечётная.

Для функций 2) и 3) область определения $[-3; 3]$ симметрична относительно начала координат, а графики функций симметричны относительно оси ординат. Функции 2) и 3) чётные.

Для функции 4) область определения $[-3; 2]$ не симметрична относительно начала координат. Функция 4) ни чётная, ни нечётная.

Ответ: 1) нечётная; 2) чётная; 3) чётная; 4) ни чётная, ни нечётная.

Задача 11.

Исследуйте на ограниченность функцию $y=\sqrt{4-x^2}$.

Решение.

1) Из определения арифметического квадратного корня следует, что $\sqrt{4-x^2}\ge 0$. Следовательно, функция $y=\sqrt{4-x^2}$ ограничена снизу.

2) Так как $x^2\ge 0 \Leftrightarrow -x^2\le 0 \Leftrightarrow 4-x^2\le 4$, то $\sqrt{4-x^2}\le 2$. Следовательно, функция $y=\sqrt{4-x^2}$ ограничена сверху. Таким образом, функция $y=\sqrt{4-x^2}$ ограничена.

Ответ: функция ограничена.

Задача 12.

Докажите, что функция $y=\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ ограничена.

Решение.

Выполним преобразования: $\dfrac{x^2+3}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1+2}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}+\dfrac{2}{x^2+1}=1+\dfrac{2}{x^2+1}$.

Так как для функции $y=\frac{1}{x^2+1}$ область значений $E(y)=(0;\,1]$, то имеет место двойное неравенство: $0<\frac{1}{x^2+1}\le 1$.

Используя правила равносильности неравенств, получим: $0<\frac{1}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow 0<\frac{2}{x^2+1}\le 2 \Leftrightarrow 1<1+\frac{2}{x^2+1}\le 3$. Таким образом, исходная функция ограничена и сверху $(y\le 3)$, и снизу $(y\ge 1)$, следовательно, она ограничена. Утверждение доказано.

Задача 13.

Исследуйте на монотонность функцию $f(x)=3x+1$ (в ответе укажите промежутки её возрастания и убывания).

Решение.

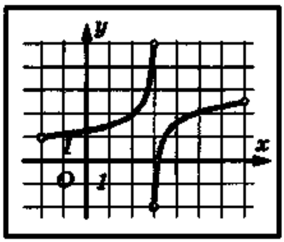
Областью определения функции $y=3x+1$ является всё множество действительных чисел: $D(y)=R$. Рассмотрим произвольные значения x_1 и x_2, такие что $x_1<x_2$. Тогда из свойств числовых неравенств получим, что $3x_1<3x_2$ и $3x_1+1<3x_2+1$.

Последнее неравенство означает, что $f(x_1)<f(x_2)$. Следовательно, функция $f(x)=3x+1$ возрастает на всей числовой прямой.

Ответ: функция возрастает на промежутке $(-\infty;\,+\infty)$.

Задача 14.

По графику функции $y=f(x)$, изображённому на рисунке, укажите промежутки возрастания и убывания функции.



Решение.

Областью определения данной функции является промежуток $[-2;\,7)$. Двигаясь по графику функции слева направо на промежутке $[-2;\,3)$, мы как будто поднимаемся в горку, поэтому на промежутке $[-2;\,3)$ функция возрастает. Аналогично, двигаясь по графику функции слева направо на промежутке $[3;\,7)$, мы снова как будто поднимаемся в горку, поэтому и на промежутке $[3;\,7)$ функция возрастает.

Данная функция не является возрастающей на всей области определения. Поэтому в ответе нельзя указать в качестве промежутка возрастания $[-2;\,7)$.

Ответ: функция возрастает на промежутках $[-2;\,3)$ и $[3;\,7)$.

Задача 15.

Найдите все значения аргумента, при которых функция $y=-2x+8$ принимает положительные значения.

Решение.

Функция $y=-2x+8$ принимает положительные значения при всех значениях x, удовлетворяющих условию: $-2x+8>0$. Откуда $x<4$.

Ответ: $(-\infty;\ 4)$.

Задача 16.

Найдите все значения аргумента, при которых функция $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ принимает отрицательные значения.

Решение.

Данная функция принимает отрицательные значения при всех значениях x, удовлетворяющих условию: $\dfrac{x+1}{x-2}<0$. Решая неравенство методом интервалов, получим: $x\in(-1;\ 2)$.

Ответ: $(-1;\ 2)$.

Задача 17.

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$.

Решение.

Выполним преобразования: $\dfrac{x^2+1}{x^2+2}=\dfrac{x^2+2-1}{x^2+2}=1-\dfrac{1}{x^2+2}$. Так как для любого значения x верно неравенство $x^2\geq 0$, то по свойствам числовых неравенств получаем: $x^2+2\geq 2$, $1\geq\dfrac{2}{x^2+2}$, $\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{1}{x^2+2}$, $-\dfrac{1}{2}\leq-\dfrac{1}{x^2+2}$ и $\dfrac{1}{2}\leq 1-\dfrac{1}{x^2+2}$. Таким образом, для любого значения x значение функции $f(x)\geq\dfrac{1}{2}$. Кроме того, $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Следовательно, по определению наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ равно $\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

Задача 18.

Найдите линейную функцию, график которой проходит через точки с координатами $(2; 3)$ и $(0; 1)$.

Решение.

Для нахождения значений k и b подставим координаты точек $(2; 3)$ и $(0; 1)$ в уравнение $y=kx+b$. Получим систему: $\begin{cases} 3=k\cdot 2+b, \\ 1=k\cdot 0+b. \end{cases}$

Решая систему, получим: $\begin{cases} k=1, \\ b=1. \end{cases}$ Следовательно, линейная функция задается формулой $y=x+1$.

Ответ: $y=x+1$.

Задача 19.

Найдите уравнение прямой, параллельной прямой $y=2x+1$ и проходящей через точку с координатами $(2; 3)$.

Решение.

Угловые коэффициенты параллельных прямых равны, поэтому уравнение искомой прямой имеет вид: $y=2x+b$. По условию искомая прямая проходит через точку с координатами $(2; 3)$, значит, координаты этой точки удовлетворяют уравнению прямой: $3=2\cdot 2+b$, откуда $b=-1$. Таким образом, получаем уравнение искомой прямой: $y=2x-1$.

Ответ: $y=2x-1$.

Задача 20.

Найдите наибольшее значение функции $y=-2x+1$ на отрезке $[2; 3]$.

Решение.

Функция $y=-2x+1$ убывающая $(k=-2<0)$, поэтому своё наибольшее значение на отрезке $[2; 3]$ она принимает на левом конце отрезка, то есть при $x=2$. Найдём это значение: $y=-2\cdot 2+1=-3$.

Ответ: -3.

Задача 21.

Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $y=x^2-3x+2$ с осью Ox.

Решение.

Абсциссы точек пересечения графика квадратичной функции $y=x^2-3x+2$ с осью Ox являются корнями уравнения $x^2-3x+2=0$. Решая его, получим: $x_1=1$, $x_2=2$.

Ответ: 1; 2.

Задача 22.

Укажите число общих точек графика функции $y=-3x^2+2x+5$ и оси абсцисс.

Решение.

Число общих точек параболы и оси абсцисс определяется знаком дискриминанта квадратного трёхчлена. Поскольку $D_1=1^2-(-3)\cdot 5=16>0$, то парабола имеет с осью абсцисс две точки пересечения.

Ответ: 2.

Задача 23.

Найдите ординату точки пересечения графика функции $y=-0{,}25x^2+7x+2$ с осью ординат.

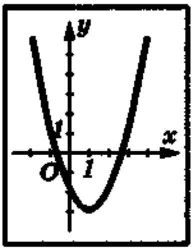
Решение.

Ордината точки пересечения графика функции с осью ординат равна $y(0)=c=2$.

Ответ: 2.

Задача 24.

На рисунке приведён график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Укажите знаки коэффициентов a, b, c и дискриминанта D.



Решение.

Ветви параболы направлены вверх, следовательно, $a>0$. Вершина параболы имеет положительную абсциссу: $x_в=-\dfrac{b}{2a}$, при этом $a>0$, следовательно, $b<0$. Парабола пересекает ось Oy в точке, ордината которой отрицательна, следовательно, $c=y(0)<0$. Парабола пересекает ось Ох в двух различных точках, следовательно, $D>0$.

Ответ: $a>0$, $b<0$, $c<0$, $D>0$.

Задача 25.

Найдите все значения x, при которых функция $y=-3x^2+5x+2$ принимает отрицательные значения.

Решение.

Для нахождения промежутков, на которых квадратичная функция принимает отрицательные значения, необходимо решить неравенство $-3x^2+5x+2<0$. $-3x^2+5x+2<0 \Leftrightarrow 3x^2-5x-2>0$, откуда $x\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)\cup(2;\ +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)\cup(2;\ +\infty)$.

Задача 26.

Найдите промежуток убывания функции $y=4x^2-2x+1$.

Решение.

Найдём абсциссу $x_в=-\frac{b}{2a}$ вершины параболы: $x_в=0{,}25$. Поскольку $a=4>0$, квадратичная функция $y=4x^2-2x+1$ убывает слева от вершины параболы на промежутке $(-\infty;\ 0{,}25]$.

Ответ: $(-\infty;\ 0{,}25]$.

Задача 27.

Найдите наибольшее значение функции $y=-x^2+3x-2$.

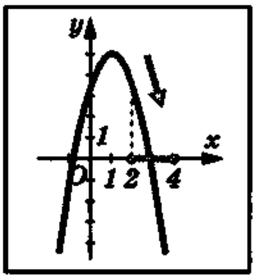
Решение.

Найдём абсциссу и ординату вершины параболы: $x_в=1{,}5$; $y_в=-(1{,}5)^2+3\cdot1{,}5-2=0{,}25$. Поскольку $a=-1<0$, ветви параболы направлены вниз, и квадратичная функция $y=-x^2+3x-2$ принимает в точке $x_в=1{,}5$ своё наибольшее значение, равное $y_в=0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Задача 28.

Найдите наибольшее значение функции $y=-2x^2+4x+3$ на отрезке $[2;\ 4]$.



Решение.

Так как $a=-2<0$, $x_в=1$, то квадратичная функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ 1]$ и убывает на промежутке $[1;\ +\infty)$. Отрезок $[2;\ 4]$ принадлежит промежутку убывания функции. Поэтому своё наибольшее значение на отрезке $[2; 4]$ функция принимает на левом конце этого отрезка, в точке $x=2$: $y(2)=3$.

Ответ: 3.

Задача 29.

Укажите, какое из чисел больше: 1) $0{,}3^{10}$ или $0{,}33^{10}$; 2) $(-0{,}2)^{15}$ или $(-0{,}5)^{15}$.

Решение.

1) Так как функция $y=x^{10}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и $0{,}3<0{,}33$, то $0{,}3^{10}<0{,}33^{10}$.

2) Так как функция $y=x^{15}$ возрастающая и $-0{,}2>-0{,}5$, то $(-0{,}2)^{15}>(-0{,}5)^{15}$.

Ответ: 1) $0{,}33^{10}$; 2) $(-0{,}2)^{15}$.

Задача 30.

Найдите наибольшее значение функции $y=x^3$ на промежутке $[-4; 2]$.

Решение.

Функция $y=x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Поэтому своё наибольшее значение на отрезке $[-4; 2]$ функция принимает на правом конце отрезка при $x=2$. Получим: $y(2)=2^3=8$.

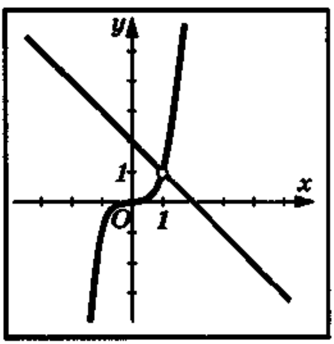
Ответ: 8.

Задача 31.

Решите уравнение $x^5+x-2=0$.

Решение.

Запишем исходное уравнение в виде: $x^5=-x+2$ и построим графики функций $y=x^5$ и $y=-x+2$. Абсциссы точек пересечения этих графиков являются корнями исходного уравнения. Графики функций пересекаются в точке с абсциссой, равной 1, что подтверждается непосредственной проверкой. Функция $y=x^5$ возрастающая, а функция $y=-x+2$ убывающая. Отсюда следует, что указанная точка пересечения единственная.



Действительно, возрастающая функция $y=x^5$ при $x\in(-\infty;1)$ принимает значения, меньшие 1, а при $x\in(1;+\infty)$ — значения, большие 1. В то же время убывающая функция $y=-x+2$ при $x\in(-\infty;1)$ принимает значения, большие 1, а при $x\in(1;+\infty)$ — значения, меньшие 1. Таким образом, $x=1$ — единственное решение исходного уравнения.

Ответ: 1.

Задача 32.

Найдите значение k, при котором график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку A с координатами $(-3;2)$.

Решение.

По условию точка A принадлежит графику функции $y=\frac{k}{x}$, поэтому её координаты удовлетворяют уравнению, задающему функцию. Подставляя координаты, получим: $2=\frac{k}{-3}\Leftrightarrow k=-6$.

Ответ: -6.

Задача 33.

Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{3}{x^2}$ на промежутке $[-3;-1]$.

Решение.

Функция $y=\frac{3}{x^2}$ возрастает на промежутке $(-\infty;0)$, а значит, и на отрезке $[-3;-1]$. Поэтому своё наибольшее значение функция принимает на правом конце отрезка при $x=-1$. Получим: $y(-1)=3$.

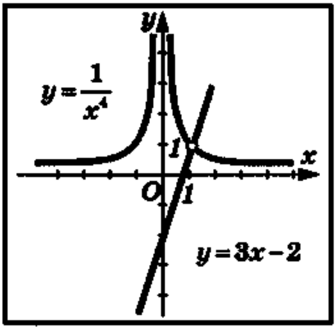
Ответ: 3.

Задача 34.

Решите уравнение $\frac{1}{x^4}=3x-2$.

Решение.

Построим графики функций $y=\frac{1}{x^4}$ и $y=3x-2$. Абсциссы точек пересечения этих графиков являются корнями исходного уравнения. Графики функций пересекаются в точке с абсциссой, равной 1, что подтверждается непосредственной проверкой. При $x>0$ функ-



ция $y=\frac{1}{x^4}$ убывает, а функция $y=3x-2$ возрастает. Отсюда следует, что на промежутке $(0;+\infty)$ других точек пересечения графиков этих функций быть не может. При $x=0$ выражение $\frac{1}{x^4}$ не определено. При $x<0$ функция $y=\frac{1}{x^4}$ принимает положительные, а функция $y=3x-2$ — отрицательные значения, поэтому на промежутке $(-\infty;0)$ их графики не пересекаются, а исходное уравнение не имеет отрицательных корней. Таким образом, $x=1$ — единственный корень уравнения.

Ответ: 1.

Задача 35.

Найдите значение функции $y=\sqrt{x^2}$ при: 1) $x=5$; 2) $x=-5$.

Решение.

Поскольку $\sqrt{x^2}=|x|$ для любого значения x, то $y(5)=|5|=5$ и $y(-5)=|-5|=5$.

Ответ: 1) 5; 2) 5.

Задача 36.

Какое из чисел больше: $a=\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{\frac{11}{17}}$ или $b=\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{11}{18}}$?

Решение.

По свойству корней: $a=\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{\frac{11}{17}}=\sqrt{\frac{55}{119}}$, $b=\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{11}{18}}=\sqrt{\frac{55}{108}}$. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая и $\frac{55}{119}<\frac{55}{108}$, то $\sqrt{\frac{55}{119}}<\sqrt{\frac{55}{108}}$. Следовательно, $a<b$.

Ответ: b.

Задача 37.

Вычислите $\sqrt[4]{9\sqrt{81}}$.

Решение.

Применяя свойства корней, получим:

$\sqrt[4]{9\sqrt{81}}=\sqrt[4]{9\sqrt{9^2}}=\sqrt[4]{9\cdot 9}=\sqrt[4]{3^4}=3.$

Ответ: 3.

Задача 38.

Найдите значение функции $y=\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}$ при $x=2\sqrt{2}$.

Решение.

При $x=2\sqrt{2}$ значение функции $y\left(2\sqrt{2}\right)=\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Приведём первое подкоренное выражение $3+2\sqrt{2}$ к виду полного квадрата: $3+2\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}+2=1^2+2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

Поэтому $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}=\left|1+\sqrt{2}\right|=1+\sqrt{2}$.

Аналогично $3-2\sqrt{2}=1-2\sqrt{2}+2=1^2-2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$. Поскольку $1-\sqrt{2}<0$, то $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\left|1-\sqrt{2}\right|=-1+\sqrt{2}$.

Получаем: $y\left(2\sqrt{2}\right)=1+\sqrt{2}+\left(-1+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Задача 39.

Найдите значение функции $y=\sqrt{(5-x)^2}+\sqrt{(9-x)^2}$ при $x=6{,}78901$.

Решение.

Используя тождество $\sqrt{a^2}=|a|$, получим:

$\sqrt{(5-x)^2}+\sqrt{(9-x)^2}=|5-x|+|9-x|$.

Так как $5<x<9$, то $5-x<0$, а $9-x>0$. Поэтому $|5-x|=-(5-x)$, а $|9-x|=9-x$. Откуда $|5-x|+|9-x|=-(5-x)+(9-x)=4$. Таким образом, при $x=6{,}78901$ $y=4$.

Ответ: 4.

Задача 40.

Найдите наименьшее значение функции $y=|x^2-2x-3|+|x+1|$

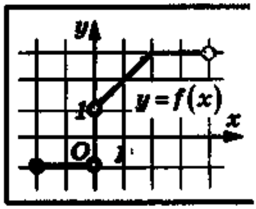
Решение.

Поскольку для любого значения x $|x^2-2x-3|\ge 0$ и $|x+1|\ge 0$, то $y=|x^2-2x-3|+|x+1|\ge 0$ на всей области определения функции. При $x=-1$ $|x+1|=0$. Заметим, что при $x=-1$ и $|x^2-2x-3|=0$. Следовательно $|x^2-2x-3|+|x+1|=0$ при $x=-1$. Таким образом, значение $y=0$ удовлетворяет двум условиям наименьшего значения функции.

Ответ: 0.

Задача 41.

Задайте аналитически функцию, график которой представлен на рисунке.



Решение.

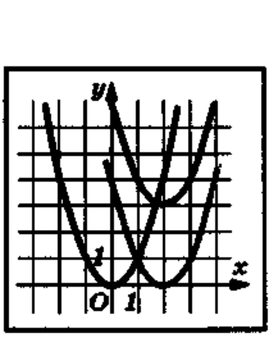
Областью определения функции $y=f(x)$ является отрезок $[-2; 4]$. На промежутке $[-2; 0)$ график функции представляет собой часть горизонтальной прямой, задаваемой уравнением $y=-1$.

Аналогично на промежутке $[2; 4]$ график функции представляет собой часть горизонтальной прямой, задаваемой уравнением $y=3$. На промежутке $[0; 2)$ график функции является частью прямой, проходящей через точки с координатами $(0; 1)$ и $(2; 3)$. Такая прямая задаётся уравнением $y=x+1$. Таким образом, при $-2\le x<0$ $y=-1$, при $0\le x<2$ $y=x+1$, при $2\le x\le 4$ $y=3$.

Ответ: $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } -2\le x<0;\\ x+1, \text{ если } 0\le x<2;\\ 3, \text{ если } 2\le x\le 4.\end{cases}$

Задача 42.

Используя график функции $y=x^2$, постройте график функции $y=(x-2)^2+3$.

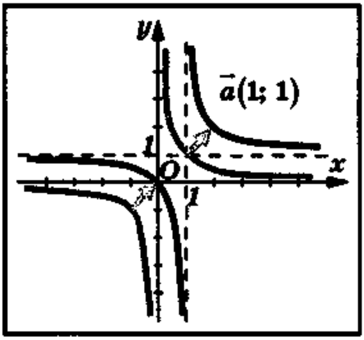


Решение.

График функции $y=(x-2)^2+3$ получается из графика функции $y=x^2$ последовательными параллельными переносами последнего на 2 единицы вправо и на 3 единицы вверх. Вершина параболы $O(0; 0)$ переходит при этом в точку $O_1(2; 3)$.

Задача 43.

Используя график функции $y=\frac{1}{x}$, постройте график функции $y=\frac{1}{x-1}+1$.



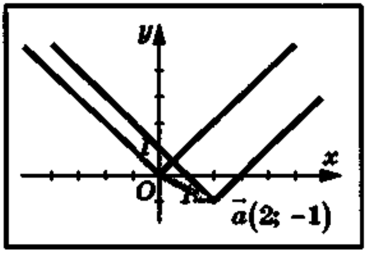
Решение.

График функции $y=\frac{1}{x-1}+1$ получается из графика функции $y=\frac{1}{x}$ последовательными параллельными переносами последнего на 1 единицу вправо и на 1 единицу вверх. Выполнение этих преобразований можно рассматривать как перенос графика функции $y=\frac{1}{x}$ на вектор $\vec{a}(1;\ 1)$. Центр симметрии гиперболы $O(0;\ 0)$ переходит при этом в точку $O_1(1;\ 1)$.

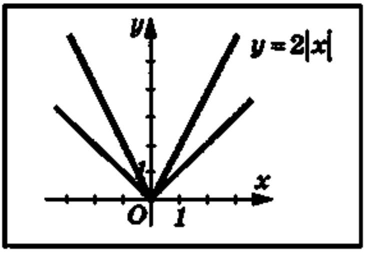
Задача 44.

Используя график функции $y=|x|$, постройте график функции: 1) $y=|x-2|-1$; 2) $y=2|x|$.

Решение.



1) График функции $y=|x-2|-1$ получается из графика функции $y=|x|$ последовательными параллельными переносами последнего на 2 единицы вправо и на 1 единицу вниз. Выполнение этих преобразований можно рассматривать как перенос графика функции $y=|x|$ на вектор $\vec{a}(2;\ -1)$. Точка $O(0;\ 0)$ переходит при этом в точку $O_1(2;\ -1)$.



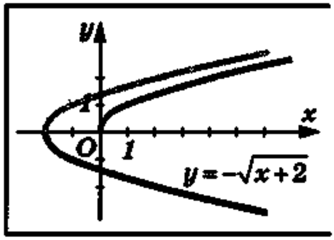
2) График функции $y=2|x|$ получается из графика функции $y=|x|$ растяжением в 2 раза вдоль оси ординат.

Задача 45.

Постройте график функции $y=-\sqrt{x+2}$.

Решение.

График функции $y=\sqrt{x+2}$ получается переносом графика функции $y=\sqrt{x}$ на 2 единицы влево. А график функции $y=-\sqrt{x+2}$ получается из графика функции $y=\sqrt{x+2}$ при помощи симметрии относительно оси Ox.



Задача 46.

Постройте график функции $y=2x^2-4x$.

Решение.

Преобразуем выражение, задающее квадратный двучлен $2x^2-4x$: $2x^2-4x=2\left(x^2-2x+1\right)-2=2(x-1)^2-2$. Таким образом, исходная функция преобразуется к виду: $y=2(x-1)^2-2$. График исходной функции $y=2x^2-4x$ получается из графика функции $y=x^2$ растяжением в 2 раза вдоль оси ординат и затем параллельными переносами на 1 единицу вправо и на 2 единицы вниз.

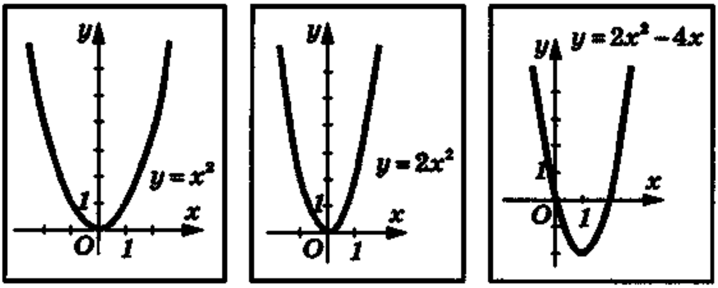


График квадратичной функции также можно построить, определив координаты вершины параболы, направление ветвей и нули функции (если они есть).

4.1. Определение числовой последовательности

Функцию $y=f(x)$, определённую на множестве натуральных чисел $x \in N$ (или его конечном подмножестве), называют числовой последовательностью и обозначают $y=f(n)$, или $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, или (y_n).

Индекс n определяет порядковый номер члена последовательности.

Значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называют соответственно первым, вторым, ..., n-м членами последовательности. Различают конечные и бесконечные числовые последовательности.

Способы задания последовательности

- **Аналитический:** указывается формула n-го члена последовательности.

Пример. Последовательность квадратов натуральных чисел 1, 4, 9, 16, ... задаётся формулой $y_n = n^2$.

С помощью формулы n-го члена можно вычислить любой член последовательности, подставив в формулу вместо n номер вычисляемого члена.

Пример. Если $y_n = \frac{2n+1}{n}$, то при $n=2$ $y_2 = \frac{2 \cdot 2+1}{2} = 2{,}5$ (второй член последовательности), при $n=20$ $y_{20} = \frac{2 \cdot 20+1}{20} = \frac{41}{20}$ и т.д.

- **Словесный:** правило составления последовательности выражается словесным описанием.

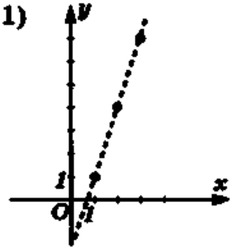
Примеры: 1) последовательность простых двузначных чисел, меньших 50, есть конечная последовательность:
11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47;
2) бесконечная последовательность приближений иррационального числа $\sqrt{3} = 1{,}732050808\ldots$: 2, 1,7, 1,73, 1,732, 1,7321, ...

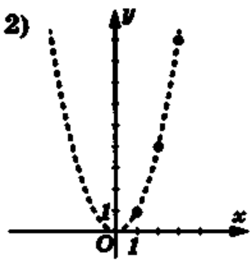
- **Рекуррентный:** указывается правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны все её предыдущие члены.

> *Пример.* $y_1 = 1$, $y_n = y_{n-1} \cdot n$, если $n \geq 2$. Вычислим несколько первых членов этой последовательности: 1, 2, 6, 24, 120, ... Можно убедиться в том, что n-й член данной последовательности равен произведению первых n натуральных чисел: $y_n = n!$

Графиком последовательности как функции, заданной на множестве натуральных чисел, являются отдельные, изолированные точки координатной плоскости.

> *Примеры:* 1) последовательность $y_n = 3n - 2$ можно рассматривать как функцию $y = 3x - 2$, где $x \in N$;
> 2) последовательность $y_n = n^2$ можно рассматривать как функцию $y = x^2$, где $x \in N$.

1) 

2) 

4.2. Свойства числовых последовательностей

Числовые последовательности являются функциями, поэтому некоторые свойства функций переносятся и на последовательности.

! Последовательность (y_n) называется **возрастающей**, если каждый член этой последовательности (кроме первого) больше предыдущего: $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_n < y_{n+1} \ldots$

> *Пример.* Последовательность кубов натуральных чисел 1, 8, 27, 64, ... возрастающая.

Последовательность (y_n) называется убывающей, если каждый член этой последовательности (кроме первого) меньше предыдущего: $y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_n > y_{n+1} \ldots$

Пример. Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ убывающая.

Возрастающие и убывающие последовательности называют общим термином — **монотонные**. Исследовать последовательность на монотонность означает выяснить, является она убывающей, возрастающей или не является монотонной.

Примеры: 1) последовательность $-1, -4, -9, -16, \ldots, -n^2, \ldots$ убывающая;
2) последовательность $-1, 0, 1, 2, \ldots, (n-2), \ldots$ возрастающая;
3) последовательность $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ не является монотонной.

Последовательность $y_n = a^n$ является:
1) возрастающей, если $a > 1$,
2) убывающей, если $0 < a < 1$,
3) и не является монотонной, если $a < 0$.

Примеры: 1) последовательность $y_n = 3^n$: 3, 9, 27, 81, ... возрастающая $(3>1)$;
2) последовательность $y_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$: $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$ убывающая $\left(0<\frac{1}{5}<1\right)$.

Последовательность (y_n) называется ограниченной сверху, если существует такое число M, что для любого номера n выполняется неравенство $y_n \le M$.
Иными словами, все члены последовательности не превосходят некоторого числа M.

Пример. Последовательность $y_n = 3-2n$: 1, −1, −3, −5, ... ограничена сверху (в частности, $M=1$).

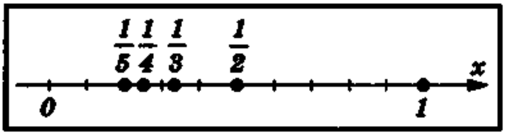
! Последовательность (y_n) называется **ограниченной снизу**, если существует такое число m, что для любого номера n выполняется неравенство $y_n \geq m$.

Пример. Последовательность $-1, 0, 1, 2, \ldots, (n-2), \ldots$ ограничена снизу (в частности, $m=-1$).

! Последовательность (y_n) называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу.

Пример. Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ограничена и сверху, и снизу (в частности, $M=1$, $m=0$).

Свойство ограниченности последовательности становится особенно наглядным, если члены последовательности изобразить точками числовой прямой.



4.3. Арифметическая прогрессия. Основные понятия

! **Арифметической прогрессией** называется числовая последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего и некоторого числа d:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Число d называют **разностью** арифметической прогрессии.

Примеры: 1) последовательность чисел 0, 2, 4, 6, 8, ... является арифметической прогрессией, так как разность между любым членом последовательности, начиная со второго, и предшествующим ему членом постоянна ($d=2$);
2) последовательность чисел 0, 1, 3, 4, 6, ... не является арифметической прогрессией, так как разность между вторым и первым членом равна 1, а между третьим и вторым равна 2.

Из определения следует, что если разность между любым членом последовательности (a_n), начиная со второго, и предшествующим ему членом (a_{n-1}) постоянна, то (a_n) — арифметическая прогрессия.

Если $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \ldots$,
то (a_n) — арифметическая прогрессия.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, необходимо указать первый член a_1 и разность d.

Пример. Пусть заданы $a_1 = 1$, $d = 3$. Выпишем первые четыре члена арифметической прогрессии: $a_1 = 1$; $a_2 = a_1 + d = 1 + 3 = 4$; $a_3 = a_2 + d = 4 + 3 = 7$; $a_4 = a_3 + d = 7 + 3 = 10$.

Арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если $d > 0$, и убывающей, если $d < 0$.

Примеры:

1) арифметическая прогрессия $-16, -11, -6, -1, 4, \ldots$ возрастающая ($d = 5 > 0$);
2) арифметическая прогрессия $13, 9, 5, 1, -3, \ldots$ убывающая ($d = -4 < 0$).

Арифметическая прогрессия обозначается символом $\div$.

Например, $\div\ a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

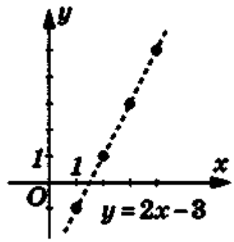
Арифметическая прогрессия может иметь как бесконечное число членов: $\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$, так и конечное число: $\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$.

Примеры:

1) $\div\ -2, -1, 0, 1, 2$ — конечная арифметическая прогрессия;
2) $\div\ 1, 3, 5, 7, \ldots$ — бесконечная арифметическая прогрессия.

Члены арифметической прогрессии можно интерпретировать точками координатной плоскости.

Пример. Члены арифметической прогрессии $-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \dots$ ($a_1=-1$, $d=2$) могут быть интерпретированы с помощью точек координатной плоскости. Очевидно, что все построенные точки координатной плоскости, являющиеся графиком арифметической прогрессии, лежат на прямой, заданной уравнением $y=2x-3$.



4.4. Общий член арифметической прогрессии

Арифметическая прогрессия (a_n) задаётся **рекуррентно:** a_1 — первый член, $a_n=a_{n-1}+d$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \dots)$, где a_1 и d — заданные числа.

Пример. Чтобы найти седьмой член арифметической прогрессии, если известны её первый член $a_1=17$ и разность $d=-2$, надо найти последовательно a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7. Получаем:
$a_2=a_1+d=17-2=15$, $a_3=a_2+d=15-2=13$, $a_4=a_3+d=13-2=11$, $a_5=a_4+d=11-2=9$, $a_6=a_5+d=9-2=7$, $a_7=a_6+d=7-2=5$.

Существует закономерность:
$a_2=a_1+d$, $a_3=a_2+d=a_1+2d$, $a_4=a_3+d=a_1+3d$, $a_5=a_4+d=a_1+4d$, $a_6=a_5+d=a_1+5d$, $a_7=a_6+d=a_1+6d$.

Таким образом, можно вычислить a_7 без вычисления предыдущих членов по формуле: $a_7=a_1+6d=17+6\cdot(-2)=5$.

Если заданы первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии, то любой её член можно вычислить по формуле n-го члена арифметической прогрессии:

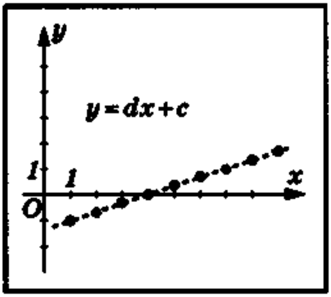
$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$$

Эта формула, которую ещё называют формулой общего члена, позволяет перейти от рекуррентного задания арифметической прогрессии к **аналитическому**.

Пример. Чтобы найти седьмой член арифметической прогрессии, если известны её первый член $a_1=17$ и разность $d=-2$, нужно просто подставить эти значения, а также значение $n=7$ в формулу n-го члена арифметической прогрессии: $a_7=a_1+(n-1)\cdot d=17+(7-1)\cdot(-2)=5$.

Рассмотрим формулу n-го члена арифметической прогрессии и запишем её в виде: $a_n = dn + (a_1 - d)$. Введём обозначения: $a_n = y$, $a_1 - d = c$. Получим: $y = dn + c$ или $y = dx + c$, где $x \in N$.

Арифметическую прогрессию можно рассматривать как линейную функцию $y = dx + c$, заданную на множестве натуральных чисел: $x \in N$.



Угловым коэффициентом этой линейной функции является число d — разность арифметической прогрессии.

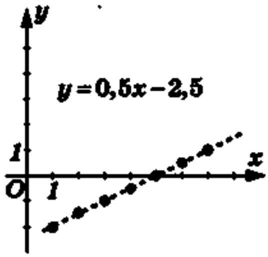
Графиком арифметической прогрессии является множество точек, лежащих на прямой $y = dx + c$, где $x \in R$.

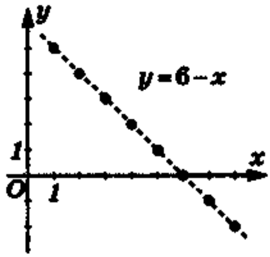
При $d > 0$ и линейная функция, и арифметическая прогрессия являются возрастающими, а при $d < 0$ — убывающими.

Примеры:

1) у арифметической прогрессии ÷ −2, −1,5, −1, −0,5, 0, 0,5, 1 $a_1 = -2$, $d = 0{,}5$, $a_n = -2 + 0{,}5(n-1)$ или $a_n = 0{,}5n - 2{,}5$.
Линейная функция $y = 0{,}5x - 2{,}5$ и заданная прогрессия являются возрастающими $(d > 0)$;

2) у арифметической прогрессии ÷ 5, 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2 $a_1 = 5$, $d = -1$, $a_n = 5 - (n-1)$ или $a_n = 6 - n$.
Линейная функция $y = 6 - x$ и заданная прогрессия являются убывающими $(d < 0)$.





4.5. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Вычислить сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) можно непосредственным сложением членов последовательности: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Первые n членов арифметической прогрессии (a_n) сами образуют конечную арифметическую прогрессию, для которой можно найти сумму всех её членов.

Пример. Найдём сумму первых 120 членов арифметической прогрессии ÷ 1, 2, 3, ... , 118, 119, 120, ... , у которой $a_1=1$ и $d=1$.
Последовательное сложение членов прогрессии в данном случае применять неудобно, так как придётся провести достаточно много вычислений. Поэтому воспользуемся приёмом группировки:

$$S=1+2+...+119+120=(1+120)+(2+119)+...+(60+61)=$$
$$=\underbrace{121+121+...+121}_{60\ слагаемых}=121\cdot 60=7260.$$

Для получения формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии запишем эту сумму двумя способами:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_3+a_2+a_1.$$

Используя определение арифметической прогрессии, запишем эти равенства в виде:

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+...+(a_1+(n-1)d),$$

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+...+(a_n-(n-1)d).$$

Складывая почленно записанные равенства и приводя подобные слагаемые, получим:

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+...+(a_1+a_n)}_{n\ слагаемых},\text{ или } 2S_n=(a_1+a_n)n.$$

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

- $$\boxed{S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n}$$

Этой формулой удобно пользоваться, если известны первый и последний члены прогрессии a_1 и a_n.

Примеры: 1) найдём сумму натуральных чисел от 1 до 120:

$$S_{120}=\frac{1+120}{2}\cdot 120=7260;$$

2) найдём сумму первых шести членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = -10$ и $a_6 = -20$:

$$S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{-10-20}{2} \cdot 6 = -90.$$

• $$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}$$

Этой формулой удобно пользоваться, если известны первый член прогрессии a_1 и её разность d.

Пример. Найдём сумму первых девятнадцати членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = -4$ и $d = 5$:

$$S_{19} = \frac{2 \cdot (-4) + 5 \cdot (19-1)}{2} \cdot 19 = 779.$$

Вторая формула получается из первой, если в ней заменить n-й член прогрессии на его значение по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$.

При решении задач можно использовать любую из формул в зависимости от данных в условии.

4.6. Характеристические свойства арифметической прогрессии

Рассмотрим арифметическую прогрессию

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$.

Из определения арифметической прогрессии следует, что $a_n - d = a_{n-1}$, $a_n + d = a_{n+1}$. Сложив эти равенства, получим: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Это равенство выражает характеристическое свойство арифметической прогрессии.

! **Первое характеристическое свойство арифметической прогрессии (a_n).**

Каждый член арифметической прогрессии (кроме первого и последнего) равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов — предыдущего и последующего:

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Пример. Пусть задана арифметическая прогрессия (a_n).

1) Если $a_{14}+a_{16}=36$, то $a_{15}=\frac{a_{14}+a_{16}}{2}=18$.

2) Если известно, что $a_7=-2$, то можно найти a_6+a_8. Поскольку $a_7=\frac{a_6+a_8}{2}$, то $a_6+a_8=2a_7=2\cdot(-2)=-4$.

Первое характеристическое свойство объясняет название — «арифметическая» прогрессия.

Справедливо также утверждение, обратное указанному свойству и являющееся **признаком арифметической прогрессии.**

Если числовая последовательность (a_n) такова, что для любого $n>1$ выполняется равенство $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, то (a_n) — арифметическая прогрессия.

Примеры: 1) числа 143, 155, 167 являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, поскольку второе число — среднее арифметическое первого и третьего: $\frac{143+167}{2}=155$;

2) числа 1, $\sqrt{3}$, 3 не являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, поскольку $\sqrt{3}\neq\frac{1+3}{2}$.

Первые n членов арифметической прогрессии (a_n) сами образуют конечную арифметическую прогрессию, обладающую следующим свойством.

Второе характеристическое свойство конечной арифметической прогрессии (a_n).

Сумма первого и последнего членов конечной арифметической прогрессии равна сумме любых двух её членов, равноудалённых от концов данной арифметической прогрессии:

$$\boxed{a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots=a_k+a_{n-k+1}}$$

Примеры: 1) если для конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ выполняется равенство: $a_1+a_{10}=41$, то $a_2+a_9=a_3+a_8=a_4+a_7=a_5+a_6=41$;

2) чтобы найти сумму всех членов конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, зная, что $a_3+a_5=7$, надо учесть, что $a_1+a_7=a_3+a_5=7$, и воспользоваться формулой суммы членов конечной арифметической прогрессии: $S_7=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=\frac{7}{2}\cdot 7=24{,}5$.

4.7. Геометрическая прогрессия. Основные понятия

! **Геометрической прогрессией называется числовая последовательность (b_n), все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q:**

$$\boxed{b_{n+1}=b_n\cdot q}$$

Число q называют знаменателем геометрической прогрессии.

Примеры: 1) последовательность чисел $-2, -6, -18, -54, \ldots$ является геометрической прогрессией, так как каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на число 3 ($q=3$);

2) последовательность чисел $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$ является геометрической прогрессией, знаменатель которой $q=-2$;

3) последовательность чисел $3, -6, -12, 24, \ldots$ не является геометрической прогрессией, так как второй член получается из первого умножением на -2, а третий из второго — умножением на 2.

Из определения следует, что геометрическая прогрессия — это числовая последовательность (b_n), заданная рекуррентно соотношением: $b_{n+1}=b_n\cdot q$, где $n=1, 2, 3, \ldots$, а b_1 и q — заданные числа, причём $b_1\neq 0$, $q\neq 0$.

Если отношение любого члена последовательности (b_n), начиная со второго, к предыдущему члену постоянно, то (b_n) — геометрическая прогрессия.

Если $\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_4}{b_3}=\ldots$, то (b_n) — геометрическая прогрессия.

Знаменатель этой прогрессии $q=\frac{b_{k+1}}{b_k}$.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, необходимо указать первый член b_1 и знаменатель q.

Пример. Пусть заданы $b_1=-2$ и $q=4$. Выпишем первые четыре члена геометрической прогрессии:
$b_1=-2$; $b_2=b_1\cdot q=-2\cdot 4=-8$;
$b_3=b_2\cdot q=-8\cdot 4=-32$; $b_4=b_3\cdot q=-32\cdot 4=-128$.

Геометрическая прогрессия является:
— возрастающей последовательностью, если $b_1>0$ и $q>1$;
— убывающей, если $b_1>0$ и $0<q<1$.

Примеры: 1) геометрическая прогрессия 4, 8, 16, 32, ... возрастающая, так как $b_1=4>0$, $q=2>1$;
2) геометрическая прогрессия 7, 1, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{49}$, ... убывающая, так как $b_1=7>0$, $q=\frac{1}{7}$, $0<\frac{1}{7}<1$;
3) последовательность 5, 5, 5, 5, ... не является ни убывающей, ни возрастающей, её можно рассматривать как геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1$ и $b_1=5$.

Если $q<0$, то знаки плюс и минус у членов прогрессии чередуются. Прогрессия в этом случае не является монотонной.

Геометрическая прогрессия обозначается символом ÷÷.

Например, ÷÷ $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$

Геометрическая прогрессия может иметь как бесконечное число членов: ÷÷ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, так и конечное число: ÷÷ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

Примеры: 1) 16, 8, 4, 2, 1 — конечная геометрическая прогрессия;
2) 1, 3, 9, 27, ... — бесконечная геометрическая прогрессия.

4.8. Общий член геометрической прогрессии

Геометрическая прогрессия (b_n) задаётся рекуррентно соотношениями: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, а b_1 и q — заданные числа, отличные от нуля.

Пример. Чтобы найти пятый член геометрической прогрессии, если известны её первый член $b_1 = 5$ и знаменатель $q = 3$, надо найти последовательно b_2, b_3, b_4, b_5. Получаем:
$b_2 = b_1 \cdot q = 5 \cdot 3 = 15$, $b_3 = b_2 \cdot q = 15 \cdot 3 = 45$,
$b_4 = b_3 \cdot q = 45 \cdot 3 = 135$, $b_5 = b_4 \cdot q = 135 \cdot 3 = 405$.

Существует закономерность:

$$b_2 = b_1 \cdot q,\ b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2,\ b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3,\ b_5 = b_4 \cdot q = b_1 q^4.$$

Таким образом, можно вычислить b_5 без вычисления предыдущих членов по формуле $b_5 = b_1 \cdot q^4$.

Если заданы первый член b_1 и знаменатель q геометрической прогрессии, то любой её член можно вычислить по формуле *n*-го члена геометрической прогрессии:

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

Эта формула, которую ещё называют **формулой общего члена**, позволяет перейти от рекуррентного задания геометрической прогрессии к аналитическому.

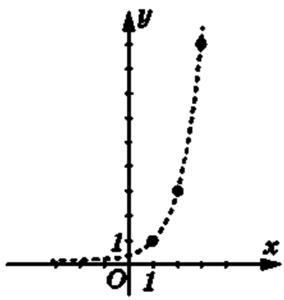
Пример. Чтобы найти третий член геометрической прогрессии, если известны её первый член $b_1 = 7$ и знаменатель $q = -2$, нужно просто подставить эти значения, а также значение $n = 3$ в формулу *n*-го члена геометрической прогрессии:
$b_3 = b_1 \cdot q^2 = 7 \cdot (-2)^2 = 28$.

Рассмотрим формулу *n*-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ и запишем её в другом виде $b_n = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$, введём обозначения $b_n = y$, $\frac{b_1}{q} = m$. Получим $y = m \cdot q^n$ или $y = m \cdot q^x$, $x \in N$. Аргумент содержится в показателе степени, поэтому геометрическую прогрессию можно рассматривать как показательную функцию, заданную на множестве N натуральных чисел.

Функцию $y = a^x$ при $a > 0$ и $a \neq 1$ называют показательной функцией.

Если $q > 0$, то члены геометрической прогрессии можно интерпретировать точками, принадлежащими графику функции $y = m \cdot q^x$, где $x \in N$.

Пример. Пусть задана геометрическая прогрессия 1, 3, 9, 27, ... Первый член этой прогрессии $b_1 = 1$, знаменатель $q = 3$, тогда общий член прогрессии $b_n = 1 \cdot 3^{n-1}$. Обозначим $b_n = y$, $n = x$, тогда $y = 3^{x-1}$ или $y = \frac{1}{3} \cdot 3^x$, $x \in N$.



4.9. Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Вычислить сумму первых n членов бесконечной геометрической прогрессии (b_n) можно непосредственным сложением членов последовательности:

$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$.

Можно также воспользоваться формулой.

Для получения формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии и запишем:

$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}$.

Умножим обе части этого равенства на q и вычтем из полученного равенства первое:

$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n$.

$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}$.

Получим: $S_n q - S_n = b_1 q^n - b_1$. Откуда $S_n(q-1) = b_1(q^n - 1)$. Если $q-1 \neq 0$, то $S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$.

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии (для случая $q \neq 1$):

$$\boxed{S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}} \quad \text{или} \quad \boxed{S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1-q}}$$

Пример. Найдём сумму первых семи членов геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 3$, $q = 2$: $S_7 = \dfrac{3\cdot(2^7-1)}{2-1} = 3\cdot 127 = 381$.

Если знаменатель геометрической прогрессии $q = 1$, то сумма первых n членов геометрической прогрессии (b_n) вычисляется сложением: $S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n\ \text{слагаемых}} = n \cdot b_1$.

4.10. Характеристические свойства геометрической прогрессии

Рассмотрим геометрическую прогрессию (b_n). Выпишем три её последовательно расположенных члена: b_{n-1}, b_n, b_{n+1}. Известно, что $\dfrac{b_n}{q} = b_{n-1}$, $b_n \cdot q = b_{n+1}$.

Перемножив эти равенства, получим: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

! **Первое характеристическое свойство конечной геометрической прогрессии (b_n).**

Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, кроме первого (и последнего — в случае конечной прогрессии), равен произведению предшествующего и последующего членов:

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Пример. Если шестой член геометрической прогрессии $b_6 = 12\sqrt{2}$, то $b_5 \cdot b_7 = 288$.

Равенство $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ может быть записано в виде: $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Указанное характеристическое свойство объясняет название — «геометрическая» прогрессия.

Число $\sqrt{ab}$ называют средним геометрическим чисел a и b.

Справедливо также утверждение, обратное указанному свойству и являющееся **признаком геометрической прогрессии.**

Если числовая последовательность (b_n), состоящая из чисел, отличных от нуля, такова, что для любого $n > 1$ выполняется равенство: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, то (b_n) — геометрическая прогрессия.

Примеры: 1) числа 1, $\sqrt{3}$, 3 являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, поскольку $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 \cdot 3$;
2) числа 143, 155, 167 не являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, поскольку $(155)^2 \neq 143 \cdot 167$.

Первые n членов геометрической прогрессии (b_n) сами образуют конечную геометрическую прогрессию, обладающую следующим свойством.

! **Второе характеристическое свойство конечной геометрической прогрессии (b_n).**

Произведение первого и последнего членов конечной геометрической прогрессии равно произведению любых двух её членов, равноудалённых от концов данной геометрической прогрессии:

$$\boxed{b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1}}$$

Примеры: 1) если для конечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}$ выполняется равенство: $b_1 \cdot b_{10} = 72$, то $b_2 \cdot b_9 = b_3 \cdot b_8 = b_4 \cdot b_7 = b_5 \cdot b_6 = 72$;
2) чтобы найти восьмой член конечной геометрической прогрессии, состоящей из десяти членов, если известно, что $b_3 = 27$ и $b_2 \cdot b_9 = 3$, надо воспользоваться тем, что $b_2 \cdot b_9 = b_3 \cdot b_8$. Получаем: $b_8 = \frac{b_2 \cdot b_9}{b_3}$, $b_8 = \frac{1}{9}$.

Прослеживается аналогия свойств геометрической прогрессии со свойствами арифметической прогрессии.

4.11. Решение задач с использованием свойств арифметической прогрессии

При решении ряда текстовых задач бывает полезным выяснить, можно ли рассматривать процессы, описанные в условии задачи, с помощью арифметической или геометрической прогрессии.

Если по условию задачи можно составить последовательность, члены которой изменяются (увеличиваются или уменьшаются) на одно и то же число, то для решения задачи имеет смысл использовать свойства арифметической прогрессии.

Например, когда в задаче говорится о следующем:
— о заработной плате, которая увеличивается ежегодно на a руб.;
— о движении, при котором скорость за каждую единицу времени изменяется на одну и ту же величину;
— о лекарстве, принимаемом по схеме: в первый день a капель, в каждый последующий день на b капель больше (меньше);
— о спортсменах, увеличивающих нагрузку на a единиц еженедельно.

Часто задачи, связанные с регулярным изменением величин на определённое число процентов (вклад в банке с заданной процентной ставкой, выплата ссуды и др.), решаются с помощью составления арифметической прогрессии. Рассмотрим пример решения такой задачи.

Пусть клиент банка оформил вклад в размере A руб. сроком на n лет. Процентная ставка по вкладу составляет $p\%$ годовых, причём начисление процентов по вкладу происходит по истечении каждого года хранения, однако начисленная сумма не добавляется к основной сумме вклада (отсутствует «капитализация процентов по вкладу»). Вкладчик снимает сумму, начисленную по процентам вклада, после каждого года хранения. При этом размер вклада для ежегодного начисления процентов будет одним и тем же: A руб. Какую сумму получит вкладчик за n лет хранения денег в банке?

После одного года хранения итоговая сумма равна: $A+A\cdot\frac{p}{100}$ руб., после двух лет хранения — $A+A\cdot\frac{p}{100}+A\cdot\frac{p}{100}=$

$= A + A \cdot \frac{2p}{100}$ руб., после трёх лет хранения — $A + A \cdot \frac{p}{100} +$
$+ A \cdot \frac{p}{100} + A \cdot \frac{p}{100} = A + A \cdot \frac{3p}{100}$ руб. и т.д.,

после n лет хранения — $A + A \cdot \frac{n \cdot p}{100} = A\left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)$ руб.

Получаем конечную арифметическую прогрессию:

$$A,\ A + A \cdot \frac{p}{100},\ A + A \cdot \frac{2p}{100},\ \ldots,\ A + A \cdot \frac{n \cdot p}{100},$$

у которой $a_1 = A$, $d = A \cdot \frac{p}{100}$.

Последний член этой прогрессии равен итоговой сумме, которую получит вкладчик за n лет хранения денег в банке.

! **Формула простых процентов:** $\boxed{A \cdot \left(1 + \frac{n \cdot p\%}{100\%}\right)}$

Пример. Вкладчик положил в банк 100 000 руб. под 10% годовых. Начисление процентов по вкладу банк производил по окончании каждого года хранения с предоставлением вкладчику возможности снятия начисленных процентов после каждого года хранения. Вкладчик ежегодно «снимал проценты», а через пять лет закрыл вклад. По истечении пяти лет итоговая сумма составила $100\,000 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 10}{100}\right) = 150\,000$ руб.

4.12. Решение задач с использованием свойств геометрической прогрессии

Если по условию текстовой задачи можно составить последовательность, члены которой увеличиваются или уменьшаются в одно и то же число раз, то для решения задачи имеет смысл использовать свойства геометрической прогрессии.

Например, когда в задаче говорится о следующем:
— о ценах на основные продукты питания, которые ежегодно повышаются в а раз;

— о заработной плате, ежегодно увеличивающейся в a раз;
— о движении, когда скорость за каждую единицу времени изменяется в одно и то же число раз;
— о лекарстве, принимаемом по схеме: в первый день a капель, в каждый последующий день в b раз больше (меньше);
— о спортсменах, увеличивающих нагрузку в a раз еженедельно.

Рассмотрим способ использования свойств геометрической прогрессии на примере следующей задачи.

Пусть клиент банка оформил вклад в размере A руб. сроком на n лет. Процентная ставка по вкладу составляет $p\%$ годовых, причём начисление процентов и добавление полученной величины к сумме вклада («капитализация процентов по вкладу») происходят по истечении каждого года хранения. При этом размер вклада для начисления процентов увеличивается ежегодно в одно и то же число раз. А вкладчик получит деньги в банке лишь после истечения всего срока хранения. Какую сумму получит вкладчик за n лет хранения денег в банке?

После первого года хранения размер вклада будет составлять $A+A\cdot\frac{p}{100}=A\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб. За первый год размер вклада увеличится в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз.

После второго года хранения размер вклада будет составлять

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)+A\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}=A\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \text{ руб.}$$

За второй год хранения размер вклада также увеличится в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз и т.д.

Каждый год размер вклада увеличивается в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз. После n-го года хранения размер вклада составит $A\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ руб.

Получаем конечную геометрическую прогрессию:

$$A,\ A\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right),\ A\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ A\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^3,\ \ldots,\ A\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

у которой $b_1=A$, $q=1+\frac{p}{100}$.

Последний член этой прогрессии равен итоговой сумме, которую получит вкладчик за n лет хранения денег в банке.

Формула сложных процентов: $\boxed{A\cdot\left(1+\frac{p\%}{100\%}\right)^n}$

Пример. Вкладчик положил в банк 100 000 руб. под 10% годовых сроком на 5 лет. Начисление процентов и добавление их к сумме вклада («капитализация процентов по вкладу») банк проводил по окончании каждого года хранения. По истечении 5 лет итоговая сумма составила: $100000\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)^5=161051$ руб.

Примеры решения задач

Задача 1.

Укажите номер функции, являющейся числовой последовательностью:

1) $y=8x-1,\ x\in Z$ 2) $y=\frac{4-x}{x},\ x\in N$ 3) $y=\frac{5x^2-1}{x-2},\ x\in Q$

Решение.

Функции 1) и 3) не являются числовыми последовательностями, так как они не заданы на множестве N натуральных чисел. Функция 2) является числовой последовательностью, так как она задана на множестве N натуральных чисел.

Ответ: 2.

Задача 2.

Найдите первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно: $y_1=2,\ y_n=y_{n-1}+5$.

Решение.

Чтобы определить n-й член последовательности, начиная со второго, нужно в рекуррентную формулу подставить значение предыдущего члена. По условию $y_1=2$. Для второго члена получим: $y_2=y_1+5=7$. Аналогично $y_3=y_2+5=12,\ y_4=y_3+5=17,\ y_5=y_4+5=22$.

Ответ: 2, 7, 12, 17, 22.

Задача 3.

Является ли число $3\frac{1}{13}$ членом последовательности $c_n=\frac{4n}{n+3}$?

Решение.

Приравняем $3\frac{1}{13}$ и c_n: $3\frac{1}{13}=\frac{4n}{n+3}$. Решим полученное уравнение относительно переменной n: $3\frac{1}{13}=\frac{4n}{n+3} \Leftrightarrow 40(n+3)=4n\cdot 13 \Leftrightarrow n=10$. Поскольку 10 — натуральное число, то $3\frac{1}{13}$ является членом последовательности c_n: $3\frac{1}{13}=c_{10}$.

Ответ: да.

Задача 4.

Укажите номер убывающей последовательности:

1) $b_n=\frac{4n}{n+1}$ 2) $c_n=2+\frac{2}{5n}$ 3) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n^2}$

Решение.

1) Сравним между собой два соседних члена последовательности b_n и b_{n+1}. Для этого вычислим их разность:

$b_{n+1}-b_n=\frac{4(n+1)}{n+2}-\frac{4n}{n+1}=\frac{4(n+1)^2-4n(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}$. Так как разность положительна при любом n, то $b_{n+1}>b_n$, следовательно, данная последовательность возрастающая.

2) Аналогично $c_{n+1}-c_n=2+\frac{2}{5(n+1)}-\left(2+\frac{2}{5n}\right)=\frac{-2}{5n(n+1)}$. Так как разность отрицательна при любом n, то $c_{n+1}<c_n$, следовательно, данная последовательность убывающая.

3) Выпишем несколько первых членов последовательности $x_n=(-1)^n\frac{1}{n^2}$: $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$ Такая последовательность не может быть монотонной, поскольку, например, $x_2>x_1$, а $x_3<x_2$.

Ответ: 2.

Задача 5.

Является ли ограниченной последовательность $x_n=\frac{n}{n+1}$?

Решение.

Все члены последовательности $x_n=\frac{n}{n+1}$ — положительные числа, поэтому данная последовательность ограничена снизу ($m=0$).

С другой стороны, заметим, что для любого натурального n верно неравенство $\frac{n}{n+1}<1$ (так как $n<n+1$), поэтому данная последовательность ограничена сверху ($M=1$). Таким образом, данная последовательность ограниченная.

Ответ: да.

Задача 6.

Укажите номера последовательностей, являющихся конечными арифметическими прогрессиями:

1) 1, 5, 10, 17, 26 2) 5, 10, 15, 20, 25 3) –5, 10, –15, 20, –25

Решение.

1) Так как $a_2-a_1\neq a_3-a_2$ $(5-1\neq 10-5)$, то последовательность не является арифметической прогрессией.

2) Так как разность между любым членом последовательности и предшествующим ему членом (между соседними членами последовательности) постоянна и равна 5, то последовательность является конечной арифметической прогрессией.

3) Так как $a_2-a_1\neq a_3-a_2$ $(10-(-5)\neq -15-10)$, то последовательность не является арифметической прогрессией.

Ответ: 2.

Задача 7.

Последовательность задана формулой $y_n=3n-2$. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

Решение.

Вычислим разность между двумя соседними членами данной последовательности: $y_{n+1}-y_n=(3(n+1)-2)-(3n-2)=3n+3-2-3n+2=3$. Поскольку разность постоянна ($d=3$), то данная последовательность — арифметическая прогрессия.

Ответ: да.

Задача 8.

Найдите три числа, которые следует поместить между числами 5 и 13, чтобы они вместе с данными образовали арифметическую прогрессию.

Решение.

Пусть d — разность искомой арифметической прогрессии. Для искомой конечной арифметической прогрессии: $a_1=5$; $a_2=a_1+d=5+d$; $a_3=a_2+d=5+d+d=5+2d$; $a_4=a_3+d=5+3d$; $a_5=a_4+d=5+4d$. С другой стороны, по условию $a_5 = 13$. Получаем уравнение: $5 + 4d = 13 \Leftrightarrow d = 2$. Подставляя значение $d = 2$ в выражения для a_2, a_3, a_4, найдём искомые числа: $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$.

Ответ: 7, 9, 11.

Задача 9.

Найдите двадцать первый член арифметической прогрессии, если известно, что её десятый член равен 16, а разность равна 2.

Решение.

Пользуясь формулой n-го члена арифметической прогрессии, запишем выражение для десятого члена прогрессии: $a_{10} = a_1 + d \cdot (10 - 1)$. Подставляя в это выражение значения $a_{10} = 16$ и $d = 2$, получим: $16 = a_1 + 2 \cdot 9$, откуда $a_1 = -2$. Теперь можно вычислить двадцать первый член данной прогрессии: $a_{21} = a_1 + d \cdot (21 - 1) = -2 + 2 \cdot 20 = 38$.

Ответ: 38.

Задача 10.

Запишите формулу общего члена арифметической прогрессии (a_n), если $a_5 = 60$, $a_7 = 30$.

Решение.

Пользуясь формулой n-го члена арифметической прогрессии, найдем разность: $a_7 - a_5 = a_1 + 6d - (a_1 + 4d) = 2d$. По условию $a_7 - a_5 = 30 - 60 = -30$. Следовательно, $d = -15$. Найдем a_1 из условия $a_7 = 30$: $a_1 + 6d = 30$, откуда $a_1 = 120$, и общий член арифметической прогрессии равен: $a_n = 120 + (n - 1) \cdot (-15)$, или $a_n = 135 - 15n$.

Ответ: $a_n = 135 - 15n$.

Задача 11.

Шестой член арифметической прогрессии в 6 раз больше её третьего члена, а при делении с остатком седьмого члена на четвёртый в частном получается 2 и в остатке — 7. Найдите девятнадцатый член этой прогрессии.

Решение.

По условию задачи $a_6 = 6a_3$ и $a_7 = 2a_4 + 7$, причём остаток от деления — неотрицательное целое число, меньшее модуля делителя: $7 < |a_4|$. Применяя формулу общего члена арифметической прогрессии, выпишем: $a_3 = a_1 + 2d$; $a_4 = a_1 + 3d$; $a_6 = a_1 + 5d$; $a_7 = a_1 + 6d$.

Тогда, используя условия задачи, можно составить систему двух линейных уравнений с двумя переменными: a_1 и d.

$$\begin{cases} a_1+5d=6(a_1+2d), \\ a_1+6d=2(a_1+3d)+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a_1+7d=0, \\ a_1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=5, \\ a_1=-7. \end{cases}$$

Поскольку $a_4=a_1+3d=8$, то условие $7<|a_4|$ выполняется. Таким образом, $a_{19}=a_1+18d$; $a_{19}=83$.

Ответ: 83.

Задача 12.

Найдите сумму первых 16 членов арифметической прогрессии, если известны два её первых члена: $a_1=-3{,}2$ и $a_2=1$.

Решение.

Найдём разность арифметической прогрессии: $d=a_2-a_1=1-(-3{,}2)=4{,}2$. Поскольку $a_1=-3{,}2$ и $d=4{,}2$, воспользуемся второй формулой для вычисления суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Получим: $S_{16}=\dfrac{2\cdot(-3{,}2)+4{,}2\cdot 15}{2}\cdot 16=452{,}8.$

Ответ: 452,8.

Задача 13.

Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если суммы первых четырёх и первых шести членов соответственно равны $S_4=9$ и $S_6=22{,}5$.

Решение.

Выразим S_4 и S_6 через a_1 и d, используя вторую формулу суммы арифметической прогрессии. Полученную систему решим методом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} \dfrac{2a_1+d(4-1)}{2}\cdot 4=9, \\ \dfrac{2a_1+d(6-1)}{2}\cdot 6=22{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a_1+6d=9, \\ 6a_1+15d=22{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a_1-6d=-9, \\ 4a_1+10d=15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4d=6, \\ 4a_1+10d=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1{,}5, \\ a_1=0. \end{cases}$$

Ответ: $a_1=0$; $d=1{,}5$.

Задача 14.

Длины сторон многоугольника составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3 см. Наибольшая сторона многоугольника равна 38 см. Найдите число сторон многоугольника, если его периметр равен 258 см.

Решение.

Обозначим длины сторон многоугольника $a_1, a_2, \dots, a_n$. Они составляют конечную арифметическую прогрессию, у которой известны разность $d=3$, последний член $a_n=38$ и сумма всех членов $S_n=258$. Воспользуемся формулой общего члена и первой формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии и составим систему уравнений, при решении которой применим метод подстановки.

$$\begin{cases} a_1+3(n-1)=38, \\ \dfrac{a_1+38}{2}\cdot n=258 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+3n=41, \\ (a_1+38)\cdot n=516 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=41-3n, \\ (41-3n+38)\cdot n=516 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=41-3n, \\ 3n^2-79n+516=0. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, получим $n=12$ или $n=\dfrac{43}{3}$. Второе значение n условию задачи не удовлетворяет, так как не является натуральным числом.

Ответ: 12.

Задача 15.

Сумма всех восьми членов конечной арифметической прогрессии равна $21\frac{1}{3}$. Найдите сумму третьего и шестого членов этой прогрессии.

Решение.

Поскольку $S_8=\dfrac{a_1+a_8}{2}\cdot 8$, а по условию $S_8=21\dfrac{1}{3}$, получаем: $\dfrac{a_1+a_8}{2}\cdot 8=21\dfrac{1}{3}$, откуда $a_1+a_8=5\dfrac{1}{3}$. Используя второе характеристическое свойство конечной арифметической прогрессии, получим: $a_1+a_8=a_2+a_7=a_3+a_6=a_4+a_5$. Таким образом, $a_3+a_6=5\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $5\frac{1}{3}$.

Задача 16.

При каких значениях x значения выражений $2x$, $3x+2$, $5x+1$, взятые в указанном порядке, образуют конечную арифметическую прогрессию?

Решение.

В соответствии с характеристическим свойством арифметической прогрессии заданные выражения должны удовлетворять условию: $3x+2=\frac{2x+(5x+1)}{2}$.

Поскольку $3x+2=\frac{2x+(5x+1)}{2} \Leftrightarrow 6x+4=7x+1 \Leftrightarrow x=3$, то при $x=3$ значения данных выражений 6, 11, 16 образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна 5.

Ответ: 3.

Задача 17.

Укажите номера последовательностей, являющихся конечными геометрическими прогрессиями:

1) $4,\ -1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{16},\ \frac{1}{64}$

2) $-2,\ 4,\ -16,\ -32$

3) $5,\ 15,\ 45,\ 135$

4) $3,\ -6,\ 18,\ 36$

Решение.

Первая и третья последовательности являются геометрическими прогрессиями, так как отношение любого члена последовательности, начиная со второго, к предыдущему члену постоянно (для первой последовательности $q=-\frac{1}{4}$, а для третьей $q=3$). Вторая и четвёртая последовательности не являются геометрическими прогрессиями, так как вышеуказанное отношение не постоянно.

Ответ: 1, 3.

Задача 18.

Найдите три положительных числа, которые следует поместить между числами 2 и $10\frac{1}{8}$, чтобы они вместе с данными образовали геометрическую прогрессию.

Решение.

Пусть q — знаменатель искомой геометрической прогрессии. Тогда $b_1=2$, $b_2=b_1\cdot q=2q$, $b_3=b_2\cdot q=2q^2$, $b_4=b_3\cdot q=2q^3$, $b_5=b_4\cdot q=2q^4$.

С другой стороны, по условию $b_5=10\frac{1}{8}$. Решаем уравнение:

$2q^4=10\frac{1}{8}\Leftrightarrow q^4=\frac{81}{16}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q=\frac{3}{2},\\ q=-\frac{3}{2}.\end{array}\right.$ Значение $q=-\frac{3}{2}$ постороннее, так как все члены прогрессии — положительные числа. Подставляя значение $q=\frac{3}{2}$ в выражения для b_2, b_3, b_4, найдём искомые числа:

$$b_2=2\cdot\frac{3}{2}=3,\ b_3=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2},\ b_4=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}.$$

Ответ: $3,\ 4\frac{1}{2},\ 6\frac{3}{4}.$

Задача 19.

Запишите формулу общего члена геометрической прогрессии (b_n), если $b_5=15$, $b_7=60$.

Решение.

Используя формулу n-го члена геометрической прогрессии, найдём отношение $\frac{b_7}{b_5}=\frac{b_1\cdot q^6}{b_1\cdot q^4}=q^2$. По условию $\frac{b_7}{b_5}=\frac{60}{15}=4$. Следовательно, $q^2=4$. Откуда $q=2$ или $q=-2$. При $q=2$ найдём b_1 из условия $b_5=15$, то есть $b_1\cdot(2)^4=15$. Откуда $b_1=\frac{15}{16}$, а общий член геометрической прогрессии равен: $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=\frac{15}{16}\cdot2^{n-1}=15\cdot2^{-4}\cdot2^{n-1}=15\cdot2^{n-5}$. При $q=-2$ аналогично получим: $b_1=\frac{15}{16}$, $b_n=15\cdot(-2)^{n-5}$.

Ответ: $b_n=15\cdot2^{n-5}$, $b_n=15\cdot(-2)^{n-5}$.

Задача 20.

Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_4=3\sqrt{3}$, $b_7=27$.

Решение.

Чтобы найти сумму S_6, надо знать первый член b_1 и знаменатель q геометрической прогрессии. Поскольку $b_4=b_1q^3$, $b_7=b_1q^6$ составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}b_1q^3=3\sqrt{3},\\ b_1q^6=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=\frac{3\sqrt{3}}{q^3},\\ \frac{3\sqrt{3}}{q^3}q^6=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=\frac{3\sqrt{3}}{q^3},\\ q^3=3\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=\frac{3\sqrt{3}}{q^3},\\ q^3=\left(\sqrt{3}\right)^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=1,\\ q=\sqrt{3}.\end{cases}$$

Зная b_1 и q, найдём S_6:

$$S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{(\sqrt{3})^6-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{27-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{26(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=13(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $13(\sqrt{3}+1)$.

Задача 21.

При каких значениях x значения выражений x, $2x$, $x+2$, взятые в указанном порядке, образуют конечную геометрическую прогрессию?

Решение.

В соответствии с характеристическим свойством геометрической прогрессии заданные выражения должны удовлетворять условию: $(2x)^2=x\cdot(x+2)$. Решим полученное уравнение:
$(2x)^2=x\cdot(x+2)\Leftrightarrow 4x^2=x^2+2x\Leftrightarrow 3x^2-2x=0\Leftrightarrow x(3x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\frac{2}{3}.\end{array}\right.$ При $x=0$ значения данных выражений 0, 0, 2 не образуют геометрической прогрессии. При $x=\frac{2}{3}$ значения данных выражений $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$ образуют конечную геометрическую прогрессию.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задача 22.

Найдите произведение первых семи членов геометрической прогрессии $\sqrt{2}$, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ...

Решение.

Из условия задачи следует, что $b_1=\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Используя второе характеристическое свойство геометрической прогрессии (b_n) и формулу её n-го члена, получим: $b_1\cdot b_7=b_2\cdot b_6=b_3\cdot b_5=b_1^2q^6$.

Тогда $b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot b_4\cdot b_5\cdot b_6\cdot b_7=(b_1\cdot b_7)\cdot(b_2\cdot b_6)\cdot(b_3\cdot b_5)\cdot b_4=(b_1^2\cdot q^6)^3\cdot b_1q^3=$

$=b_1^7\cdot q^{21}=(\sqrt{2})^7\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{21}=\frac{1}{(\sqrt{2})^{14}}=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}.$

Ответ: $\frac{1}{128}$.

Задача 23.

Градусные меры углов треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите второй член этой прогрессии.

Решение.

a_1, a_2, a_3. Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии, запишем: $a_2=a_1+d$; $a_3=a_1+2d$. Воспользуемся тем фактом, что сумма углов треугольника равна 180°. Составим и решим уравнение:

$$a_1+a_2+a_3=180 \Leftrightarrow a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=180 \Leftrightarrow 3a_1+3d=180 \Leftrightarrow a_1+d=60.$$

Ответ: 60.

Задача 24.

Тело начинает движение и в первую секунду проходит 4,9 м, а в каждую следующую секунду — на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Какой путь пройдёт тело за 10 секунд?

Решение.

Длины отрезков, проходимых телом каждую секунду, — это члены конечной арифметической прогрессии (a_n), где $a_1=4{,}9$, $d=9{,}8$. Путь, пройденный телом, равен сумме S_{10} всех десяти членов этой прогрессии. Воспользуемся формулой $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$.

Получим: $S_{10}=\dfrac{2\cdot 4{,}9+9{,}8(10-1)}{2}\cdot 10=(9{,}8+9{,}8\cdot 9)\cdot 5=490.$

Ответ: 490 м.

Задача 25.

Ежемесячная квартплата семьи Скворцовых составляет 2000 руб. За каждый просроченный день взимается пеня в размере 0,1% квартплаты. Какую сумму должны будут заплатить Скворцовы, если просрочат платёж на 10 дней?

Решение.

Так как за каждый просроченный день сумма платежа будет увеличиваться на одно и то же число, равное 0,1% от 2000 руб., то мы имеем дело с арифметической прогрессией и можем применить формулу простых процентов, где $A=2000$, $p=0{,}1$, $n=10$.

Получим: $2000\cdot\left(1+\dfrac{10\cdot 0{,}1}{100}\right)=2000\cdot 1{,}01=2020$ руб. Таким образом, Скворцовы заплатят 2020 руб.

Ответ: 2020 руб.

Задача 26.

Дан квадрат со стороной 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата и т.д. Найдите сумму площадей пяти таких квадратов.

Решение.

Сторона первого квадрата равна 4. Используя теорему Пифагора, найдём сторону второго квадрата: $b_2=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. Аналогично найдём стороны следующих квадратов: $b_3=2$, $b_4=\sqrt{2}$, $b_5=1$. Используя формулу площади квадрата $S=a^2$, найдём площади пяти квадратов: $S_1=16$, $S_2=8$, $S_3=4$, $S_4=2$, $S_5=1$. Последовательность 16, 8, 4, 2, 1 является конечной геометрической прогрессией, первый член которой равен 16, знаменатель равен $\frac{1}{2}$, а сумма первых пяти членов $S_5=\dfrac{16\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{\frac{1}{2}}=31$.

Ответ: 31 см².

Задача 27.

Цена пальто составляла 5000 руб. Какова стала цена этого пальто после того, как она трижды снижалась на 10%?

Решение.

Для решения задачи можем воспользоваться формулой $A\cdot\left(1-\dfrac{p\%}{100\%}\right)^n$, аналогичной формуле для вычисления сложных процентов. Действительно, уменьшение числа A на $p\%$ приводит к новому значению: $A\cdot\left(1-\dfrac{p\%}{100\%}\right)$. Уменьшение полученного значения на $p\%$ приводит к значению: $A\cdot\left(1-\dfrac{p\%}{100\%}\right)\left(1-\dfrac{p\%}{100\%}\right)=A\cdot\left(1-\dfrac{p\%}{100\%}\right)^2$ и т.д. Полученные значения являются членами геометрической прогрессии, последний член которой $A\cdot\left(1-\dfrac{p\%}{100\%}\right)^n$ равен числу, полученному из A, если его n раз последовательно уменьшать на $p\%$. Искомая цена пальто: $A\cdot\left(1-\dfrac{p\%}{100\%}\right)^3=5000\left(1-\dfrac{10}{100}\right)^3=3645$ (руб.).

Ответ: 3645 руб.

Глава 5. Элементы статистики и теории вероятностей

5.1. Наборы данных. Кратность и частота

Наборы (ряды, базы) числовых данных получают в результате социологических исследований, тестирований, опросов, измерений каких-либо величин и т.д., то есть в результате сбора информации в числовом виде.

Пример. Наборами данных могут быть значения возраста сотрудников компании и стажа их работы; результаты тестирования, проведённого в школах; измерения температуры воздуха в течение определённого времени.

Полученную информацию часто представляют в виде таблицы данных.

Пример.

Фамилия	Асеева	Белов	Васина	Грибова	Дымов
Стаж работы	2	37	5	25	1

! Объём набора данных (объём измерения) — это полное количество данных.

Некоторые значения в наборе данных могут быть одинаковыми и повторяться несколько раз. Тогда говорят о кратности значений.

Пример. В наборе значений возраста шести учащихся: 15, 16, 15, 17, 16, 15 значение 15 имеет кратность 3, значение 16 — кратность 2, а значение 17 — кратность 1.
Сумма кратностей набора равна 6, то есть общему числу учащихся (объёму данного набора).

! Если в наборе данных некоторое значение встретилось ровно k раз, то число k называют кратностью этого значения.

Если сложить все кратности значений набора, то получится объём набора.

! **Частотой значения** называют отношение её кратности к объёму набора данных.

$$Частота=\frac{Кратность}{Объём}$$

Сумма частот различных значений набора равна 1.

Иногда частоту выражают в процентах.

$$Частота,\ \%=\frac{Кратность}{Объём}\cdot 100\%$$

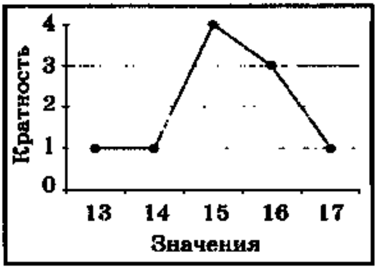
Пример. В наборе значений: 15, 16, 15, 17, 16, 15, 13, 14, 15, 16, объём которого равен 10, значение 15 имеет кратность 4. Тогда частота этого значения равна $\frac{4}{10}=0{,}4$, или $0{,}4\cdot 100\%=40\%$.

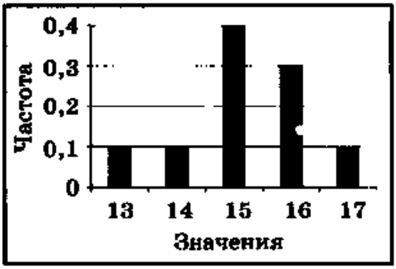
В случае, когда набор данных содержит много повторяющихся значений, составляют **таблицу распределения данных по кратностям и частотам**.

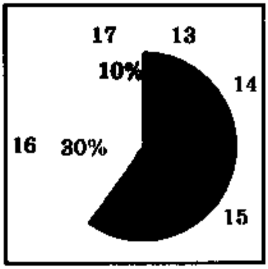
Пример. Для набора значений: 15, 16, 15, 17, 16, 15, 13, 14, 15, 16 можно составить следующую таблицу распределения по частотам.

Значение	13	14	15	16	17
Кратность	1	1	4	3	1
Частота	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1
Частота, %	10%	10%	40%	30%	10%

На основании такой таблицы можно построить график распределения данных (по кратностям или частотам), который называют также многоугольником, или полигоном. Кроме графиков часто используют столбчатые и круговые диаграммы.







5.2. Основные характеристики наборов данных

Наборы числовых данных обладают следующими числовыми характеристиками.

Размах набора данных — это разность между максимальным и минимальным значениями.

Пример. В наборе значений возраста шести учащихся: 15, 16, 15, 17, 16, 15 — размах равен $17-15=2$.

Среднее значение набора данных x_1, x_2, x_3, ... , x_n (среднее арифметическое, или просто среднее) — это сумма всех значений числового набора, делённая на их количество:

$$\boxed{\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}}$$

Примеры: 1) в наборе значений возраста шести учащихся: 15, 16, 15, 17, 16, 15 — среднее значение: $\frac{15+16+15+17+16+15}{6}=15\frac{2}{3}$, то есть 15 лет и 8 месяцев;
2) для набора из пяти чисел: 0, 0, 0, 0, −10 среднее арифметическое: $\frac{0\cdot4+(-10)}{5}=-2$.

Если известны кратности различных значений набора данных,

Значение	x_1	x_2	x_3	...	x_n	
Кратность	k_1	k_2	k_3	...	k_n	

то, чтобы найти среднее, следует каждое значение x умножить на его кратность k, сложить полученные произведения и разделить на объём набора данных, равный сумме кратностей:

$$\boxed{\frac{x_1\cdot k_1+x_2\cdot k_2+\ldots+x_n\cdot k_n}{k_1+k_2+\ldots+k_n}}$$

Пример. В наборе значений возраста учащихся, заданном таблицей распределения по кратностям:

Значение	15	16	17
Кратность	3	2	1

среднее значение: $\frac{15\cdot3+16\cdot2+17\cdot1}{3+2+1}=15\frac{2}{3}$.

Вместо кратностей для нахождения среднего можно использовать частоты:

$$x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n$$

Пример. В наборе значений, заданном таблицей распределения по частотам:

Значение	15	16	17
Частота	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

среднее значение: $15 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{3} + 17 \cdot \frac{1}{6} = 15\frac{2}{3}$.

! **Мода — это значение, которое в наборе данных встречается чаще всего.**

Если набор данных задан таблицей распределения по кратностям или частотам, то для определения моды следует найти наибольшую величину в строке кратностей или частот и указать соответствующее ей значение данных.

Примеры:

1) в наборе значений возраста учащихся, заданном таблицей распределения по кратностям:

Значение	15	16	17
Кратность	3	2	1

модой является число 15, поскольку ему соответствует наибольшая кратность, равная 3;

2) для распределения данных по частотам

Значение	0	1	2	3	4	5
Частота	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

модой является значение 3, поскольку ему соответствует наибольшая частота, равная 0,3.

! **Медиана — это значение набора данных, которое окажется посередине, если этот набор упорядочить по возрастанию. Если набор данных содержит чётное количество чисел, то берут среднее арифметическое двух чисел, оказавшихся посередине после упорядочивания.**

Примеры: 1) набор чисел 3, 10, 15, 3, 10 после упорядочивания: 3, 3, 10, 10, 15. Медиана — число 10, стоящее посередине;

2) для набора чисел: 3, 3, 4, 10, 10, 15 медиана равна $\frac{4+10}{2} = 7$.

5.3. Вероятности случайных событий

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия испытания, исходов испытания, случайного события и его вероятности.

Под **испытанием** понимают некое действие, выполнение которого должно привести к одному из нескольких возможных результатов, или **исходов**, но при этом заранее неизвестно, к какому именно.

Пример. Испытание состоит в бросании игрального кубика. Исходом является выпадение грани с определённым числом точек.

! **Случайным событием** при выполнении испытания называют наступление любого из исходов, отвечающих какому-либо заранее заданному требованию или условию.

Пример. При извлечении наугад одного шара из коробки с чёрными и белыми шарами извлечение какого-то конкретного шара — один из возможных исходов испытания, а извлечение чёрного шара — случайное событие.

! Если все исходы испытания равновозможны, то **вероятностью** $P(A)$ **случайного события** A называется отношение числа исходов, отвечающих условию события A, к общему числу исходов испытания.

Пример. При извлечении наугад шара из коробки с 7 чёрными и 3 белыми шарами вероятность извлечения чёрного шара: $\frac{7}{7+3}=0{,}7$.

Для нахождения вероятности случайного события A следует вычислить:

1. число N всех возможных исходов испытания;
2. число $N(A)$ исходов, при которых наступает событие A;
3. отношение $\frac{N(A)}{N}$.

$$\boxed{P(A)=\frac{N(A)}{N}}$$

Пример. При бросании игрального кубика возможны 6 различных исходов, число исходов, при которых выпадает чётное число точек, равно 3 (грани с 2, 4 и 6 точками), следовательно, вероятность выпадения грани с чётным числом точек равна $\frac{3}{6}=0{,}5$.

Вероятность любого события заключена в пределах от 0 до 1: $0 \le P(A) \le 1$.

Правила вычисления вероятностей

1. Вероятность элементарного события (события, которое соответствует единственному исходу из N равновозможных) равна $\frac{1}{N}$.
2. Вероятность невозможного события (события, которое не наступает ни при каком исходе) равна 0.
3. Вероятность достоверного события (события, которое наступает при любом исходе) равна 1.

Пример. При бросании игрального кубика вероятность выпадения грани с 5 точками равна $\frac{1}{6}$, грани с 11 точками равна 0, а грани с числом точек, меньшим 10, равна 1.

4. Вероятность события, противоположного событию A (события, заключающегося в том, что событие A не наступает), равна $1-P(A)$.

Пример. Если вероятность купить бракованный товар равна 0,02, то вероятность купить этот же товар без брака равна $1-0{,}02=0{,}98$.

5. Если известно, что событие A происходит с частотой $\frac{1}{n}$, то его вероятность равна его частоте: $P(A)=\frac{1}{n}$.

Пример. Если при производстве деталей в среднем выпускается 1 бракованная деталь на 50, то частота брака равна $\frac{1}{50}$ и вероятность того, что случайно выбранная деталь окажется бракованной, равна 0,02.

Условия, определяющие случайные события, часто имеют достаточно сложную структуру. Как правило, такие события можно охарактеризовать с помощью нескольких более простых событий.

Произведением событий A и B называют событие $A \cdot B$, состоящее в наступлении обоих этих событий.

Правило вычисления вероятности произведения событий

Если события A и B независимы (они происходят в разных испытаниях, и исход одного испытания не может влиять на исход другого), то вероятность того, что наступят оба этих события, равна $P(A) \cdot P(B)$. Другими словами, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Пример. Событие A состоит в том, что при первом бросании игрального кубика выпало 6 очков, а событие B — в том, что при втором бросании игрального кубика выпало 6 очков. Тогда произведение этих событий — это выпадение двух шестёрок при двукратном бросании кубика. Поскольку результат одного бросания не зависит от результата другого бросания, события A и B независимы. Следовательно, вероятность выпадения двух шестёрок подряд равна $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Суммой событий A и B называют событие $A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Правило вычисления вероятности суммы событий

Если события A и B несовместны (они не могут происходить одновременно), то вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий, равна $P(A) + P(B)$. Другими словами, вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B)}$$

Пример. При стрельбе по мишени спортсмен с вероятностью 0,2 попадает в десятку, а с вероятностью 0,4 — в девятку. Для одного выстрела попадание в десятку (событие A) и попадание в девятку (событие B) несовместны, поскольку не могут произойти одновременно. Следовательно, вероятность набрать не менее 9 очков при одном выстреле (вероятность суммы событий A и B) равна $P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}2+0{,}4=0{,}6$.

Существует класс задач, в которых требуется определить вероятность случайного попадания точки в какую-либо часть отрезка или плоской фигуры. В таких случаях говорят о геометрической вероятности.

Вероятность того, что точка, случайным образом выбранная на отрезке AB, окажется принадлежащей отрезку A_1B_1, целиком содержащемуся в отрезке AB, равна отношению длин этих отрезков:

$$\boxed{P=\frac{A_1B_1}{AB}}$$

Пример. На отрезке $[0;\,5]$ выбрано произвольное число. Вероятность того, что оно удовлетворяет неравенству $2\le x\le 4$, равна отношению длины отрезка $[2;\,4]$ к длине отрезка $[0;\,5]$: $P=\frac{2}{5}=0{,}4$.

Вероятность того, что точка, случайным образом выбранная из фигуры F, окажется принадлежащей фигуре F', целиком содержащейся в фигуре F, равна отношению площадей этих фигур:

$$\boxed{P=\frac{S(F')}{S(F)}}$$

Пример. Площадь поверхности Земли — 510 млн км², суша занимает площадь 150 млн км². Вероятность того, что метеорит, случайным образом падающий на Землю, упадёт на сушу, равна $\frac{150}{510}=\frac{5}{17}$.

Примеры решения задач

Задача 1.

За решение задач математической олимпиады можно получить от 0 до 10 баллов. Баллы, набранные 20 участниками олимпиады, представлены в таблице.

Номер участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Полученный балл	7	5	4	5	7	6	0	3	2	9	6	6	8	1	2	4	7	6	10	1

Заполните таблицу распределения результатов олимпиады по кратностям и частотам.

Решение.

0 баллов получил только один участник олимпиады под номером 7. Следовательно, кратность балла 0 равна 1. Объём набора результатов равен числу участников олимпиады, то есть 20. Частота балла 0 равна отношению его кратности к объему: $\frac{1}{20}=0{,}05$.

1 балл получили два участника, поэтому кратность балла 1 равна 2, а частота: $\frac{2}{20}=0{,}1$.

Аналогичным образом заполняются остальные клетки таблицы.

Балл	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кратность	1	2	2	1	2	2	4	3	1	1	1
Частота	0,05	0,1	0,1	0,05	0,1	0,1	0,2	0,15	0,05	0,05	0,05

Обратите внимание: сумма всех кратностей равна числу участников олимпиады, а сумма частот равна 1.

Задача 2.

На диаграмме представлены результаты исследования уровня грамотности (в процентах) в ряде стран. Сколько стран участвовало в исследовании?

Решение.

Чтобы узнать количество стран-участниц, то есть объём набора данных, нужно сложить все кратности: $1+3+4+2+2=12$.

Ответ: 12.

Задача 3.

Стаж работы семи служащих компании представлен в таблице.

Служащий	1	2	3	4	5	6	7
Стаж работы	7	17	19	11	22	8	14

Найдите разность между средним стажем работы служащих компании и медианой этого набора данных.

Решение.

Средний стаж работы служащих компании равен среднему арифметическому заданного набора, состоящего из семи чисел: $\frac{7+17+19+11+22+8+14}{7}=14$.

Чтобы найти медиану заданного набора чисел, упорядочим их по возрастанию: 7, 8, 11, 14, 17, 19, 22. Медианой является число, стоящее в середине упорядоченного набора, то есть число 14. Разность между средним стажем работы служащих компании и медианой этого набора равна $14-14=0$.

Ответ: 0.

Задача 4.

В 9 «А» и 9 «Б» классах проводили тестирование. Результаты тестирования представлены в таблице.

Класс	5 баллов	4 балла	3 балла	2 балла
9 «А»	15 учащихся	9 учащихся	4 учащихся	2 учащихся
9 «Б»	5 учащихся	8 учащихся	13 учащихся	4 учащихся

Найдите разность между модами результатов тестирования 9 «А» и 9 «Б» классов.

Решение.

Поскольку результаты тестирования по 5-балльной шкале представлены в таблице по кратностям, то для определения моды следует найти наибольшую величину в строке кратностей и указать соответствующее ей значение данных. Для 9 «А» класса наибольшая величина кратности, равная 15, соответствует 5 баллам. Следовательно, мода равна 5. Для 9 «Б» класса наибольшая величина кратности, равная 13, соответствует 3 баллам. Поэтому мода равна 3. Разность между модами результатов тестирования 9 «А» и 9 «Б» классов равна $5-3=2$.

Ответ: 2.

Задача 5.

При игре в рулетку шарик может остановиться в любом из секторов с числами от 0 до 36. Какова вероятность того, что выигравшее число будет больше 30?

Решение.

Полное число возможных исходов при игре в рулетку совпадает с количеством секторов, то есть с количеством целых чисел от 0 до 36. Таких чисел 37. Из них ровно 6 исходов (сектора с числами 31, 32, 33, 34, 35, 36) удовлетворяют условию случайного события «выигравшее число больше 30». Следовательно, вероятность данного события равна $\frac{6}{37}$.

Ответ: $\frac{6}{37}$.

Задача 6.

Прогнозы погоды не сбываются в 15% случаев. Какова вероятность того, что прогноз погоды на завтра окажется верным?

Решение.

Поскольку прогнозы погоды не сбываются в 15% случаев, то есть в 15 случаях из 100, частота ошибочных прогнозов равна $\frac{15}{100}$, а вероятность того, что какой-то прогноз не сбудется, равна 0,15. Вероятность того, что прогноз на завтра сбудется, есть вероятность противоположного события, следовательно, она равна $1-0{,}15=0{,}85$.

Ответ: 0,85.

Задача 7.

Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x-1|\le 2$. Какова вероятность того, что оно является и решением неравенства $|x|\le 0{,}5$?

Решение.

Решением неравенства $|x-1|\le 2$ служит отрезок $[-1;\ 3]$, длина которого равна 4, а решением неравенства $|x|\le 0{,}5$ служит отрезок $[-0{,}5;\ 0{,}5]$, длина которого равна 1. Следовательно, искомая вероятность $P=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Содержание

Глава 4. Прогрессии

Глава 5. Элементы статистики и теории вероятностей

Серия «Краткий курс»

Шевелева Наталья Васильевна
Корешкова Татьяна Александровна
Мирошин Владимир Васильевич

Математика

(алгебра, элементы статистики и теории вероятностей)

9 класс

Издание для дополнительного образования

Главный редактор ***И.Е. Федосова***
Ответственный редактор ***Е.Ю. Мишняева***
Редактор ***О.В. Чеснокова***
Художественный редактор ***М.А. Левыкин***
Иллюстрации ***Н.А. Кротов***
Компьютерная вёрстка ***С.Н. Терентьева***
Технические редакторы ***А.С. Колесникова, В.Ю. Фотиева***
Корректор ***Н.В. Багрова***

ООО «Национальное образование»
119021, Москва, ул. Россолимо, д. 17, стр. 1, тел. (495) 788-0075(76)

Свои пожелания и предложения по качеству и содержанию книг
Вы можете сообщить по эл. адресу editorial@n-obr.ru

Подписано в печать 15 01.2011. Формат 70x90/ 16.
Усл печ л 10,53 Печать офсетная Бумага типографская
Тираж 10 000 экз Заказ № 4976

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Полиграфиздат»
144003, г. Электросталь, Московская область, ул. Тевосяна, д. 25